

# Sitios de Grothendieck y cohomología étale <sup>1</sup>

Pedro Luis del Angel Rodríguez

CIMAT

Apdo. Postal 402

36240. Guanajuato, Gto.

México

`luis@cimat.mx`

<sup>1</sup>Parcialmente financiado por el proyecto CONACyT No. 299159



# Índice general

<b>1. Esquemas</b>	<b>7</b>
<b>2. Morfismos</b>	<b>11</b>
<b>3. Morfismos planos.</b>	<b>15</b>
<b>4. Diferenciales de Kähler.</b>	<b>23</b>
4.1. Diferenciales de Kähler I . . . . .	23
4.2. Diferenciales de Kähler II . . . . .	27
4.3. Diferenciales de Kähler III . . . . .	30
<b>5. Morfismos Lisos</b>	<b>35</b>
<b>6. Morfismos Étale</b>	<b>41</b>
<b>7. Morfismos casi compactos, separados y casi separados.</b>	<b>45</b>
<b>8. Sitios de Grothendieck</b>	<b>49</b>
8.1. Sitios de Grothendieck I . . . . .	49
8.1.1. Gavillas . . . . .	51
8.2. Sitios de Grothendieck II. . . . .	54
8.2.1. El funtor de puntos . . . . .	56
8.3. Gavillas localmente constantes. . . . .	59
8.4. Gavillas constantes. . . . .	60
8.5. La gavilla $\mu_n$ . . . . .	61
8.6. Gavillas edificables. . . . .	62
8.7. Gavillas $l$ -ádicas. . . . .	62
8.8. Fibras de una gavilla . . . . .	63
<b>9. Descenso fielmente plano.</b>	<b>65</b>
<b>10. Funtores derivados.</b>	<b>69</b>
10.1. Funtores derivados. . . . .	69
10.2. Resolución de Godement. . . . .	78
<b>11. Cohomología de Čech.</b>	<b>81</b>

<b>12. Teoremas de Comparación</b>	<b>85</b>
12.1. Teoremas de comparación I. . . . .	85
12.2. Definición de $j_!$ para las topologías de Zariski y étale. . . . .	85
12.3. Teoremas de comparación II. . . . .	90
12.4. Teorema de Artin. . . . .	90
12.5. Teoremas de comparación III. . . . .	94
12.5.1. Cohomología étale vs. cohomología de Galois. . . . .	95
12.5.2. Sucesión espectral de Leray-Grothendieck . . . . .	97
<b>13. Sitios de Grothendieck revisitados.</b>	<b>99</b>
13.1. Cribas. . . . .	99

# Prefacio

Las presentes notas surgieron de un taller sobre métodos **p-ádicos en Teoría de Hodge**, llevado a cabo del 25 al 29 de Noviembre de 2019 en Mérida, Yucatán, en la sede Mérida del CIMAT. Espero que puedan servir de punto de arranque sobre el tema para las generaciones jóvenes.

Se supone del lector cierta familiaridad con el lenguaje de esquemas y gavillas, por lo que se dedica sólo un breve capítulo a recordar el lenguaje de esquemas, así como otro capítulo muy breve a recordar algunas propiedades básicas de morfismos entre esquemas.



# Capítulo 1

## Esquemas

1. Recuerde que si  $X$  es un espacio topológico, un functor  $\mathcal{F} : \mathcal{T}op_X \rightarrow \text{Grupos}$  se dice una *gavilla* si para todo abierto  $U \subset X$  y toda cubierta abierta  $\{V_\alpha\}$  de  $U$  se cumplen además las siguientes condiciones:

1) Toda colección de secciones locales que coinciden en las intersecciones **extiende** a una sección global, es decir, toda colección de secciones  $\{s_\alpha \in \mathcal{F}(V_\alpha)\}$  tales que  $s_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = s_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$  para toda pareja de índices  $\alpha, \beta$ , define una sección  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_{V_\alpha} = s_\alpha$  para todo  $\alpha$ .

2) Toda sección que localmente es cero es de hecho la sección cero, es decir, si  $s \in \mathcal{F}(U)$  es tal que  $s|_{V_\alpha} = 0$  para toda  $\alpha$ , entonces  $s = 0$ .

**Demuestre** que estas dos condiciones son equivalentes a pedir que  $\mathcal{F}$  sea un functor tal que, para toda cubierta abierta  $\{V_\alpha\}$  de  $U$ , la sucesión siguiente sea exacta:

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{F}(V_\alpha) \xrightarrow{res_{\alpha,\beta} - res_{\beta,\alpha}} \prod_{\alpha \neq \beta} \mathcal{F}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

donde  $res_{\alpha,\beta} : \mathcal{F}(V_\alpha) \rightarrow \mathcal{F}(V_\alpha \cap V_\beta)$  y  $res_{\beta,\alpha} : \mathcal{F}(V_\beta) \rightarrow \mathcal{F}(V_\alpha \cap V_\beta)$  son las restricciones naturales.

**Equivalentemente**,  $\mathcal{F}$  es una gavilla si para toda cubierta abierta  $\{V_\alpha\}$  de  $U$ ,  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{F}(V_\alpha)$  es el ecualizador de

$$\prod_{\alpha} \mathcal{F}(V_\alpha) \begin{array}{c} \xrightarrow{res_{\alpha,\beta}} \\ \xrightarrow{res_{\beta,\alpha}} \end{array} \prod_{\alpha \neq \beta} \mathcal{F}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

2. Un *morfismo* entre gavillas es simplemente una transformación natural entre los funtores correspondientes.

3. Recuerde que un *espacio anillado* es un espacio topológico  $X$  provisto con una gavilla de anillos (conmutativos con unidad)  $\mathcal{O}_X$ , que llamaremos la *gavilla estructural* de  $X$ . Dados una gavilla  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  y un punto  $x \in X$  definimos el *tallo* de  $\mathcal{F}$  en  $x$  como  $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ .

**Demuestre** que si  $\mathcal{F}$  es una gavilla de anillos, entonces  $\mathcal{F}_x$  es un anillo para todo punto  $x \in X$ .

Si el anillo  $\mathcal{O}_x$  es un anillo local para todo punto  $x \in X$  diremos que  $X$  es un espacio *localmente* anillado.

4. Recuerde que dado un functor  $F : \mathcal{T}op_X \rightarrow \text{Grupos}$ , existen una única gavilla  $\mathcal{F}$ , llamada la *gavilla asociada* a  $F$ , y una única transformación natural  $\alpha : F \rightarrow \mathcal{F}$  tal que, para toda gavilla  $\mathcal{G}$  y para toda transformación natural  $\beta : F \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $\beta$  factoriza a través de  $\alpha$ , es decir, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F} \\ & \searrow \beta & \downarrow \tilde{\alpha} \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

5. Si  $A$  es un anillo conmutativo (con unidad), al espacio topológico  $\text{Spec } A$  lo podemos dotar de una estructura de espacio localmente anillado con la gavilla estructural  $\mathcal{O}$  dada mediante

$$\mathcal{O}(U) := \left\{ s : U \rightarrow \sqcup_{p \in U} A_p \quad : \quad \begin{array}{l} \text{a) } s(p) \in A_p \quad \forall p \in U \\ \text{b) } \forall p \in U \\ \text{existen } p \in V \subset U \quad s(q) = \left[ \frac{f}{g} \right] \in A_q \forall q \in V \\ \text{y } f, g \in A \text{ tales que} \end{array} \right\}$$

Recuerde que los conjuntos abiertos  $D(f) = \{p \in \text{Spec } A \mid f \notin p\}$  constituyen una base de la topología de  $\text{Spec } A$  y que además el abierto  $D(f)$  es homeomorfo a  $\text{Spec } A_f$ .

**Demuestre** que  $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$ , en particular  $\mathcal{O}(\text{Spec } A) \cong A$ . Observe que, puesto que  $\mathcal{O}$  es una gavilla, hubiéramos podido definir  $\mathcal{O}$  simplemente indicando que  $\mathcal{O}(D(f)) = A_f$ .

6. Recuerde que si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y  $\mathcal{F}$  es una gavilla en  $X$ , entonces podemos definir una gavilla  $f_*\mathcal{F}$  en  $Y$  mediante

$$f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$



Recuerde también que dar un *morfismo* entre dos espacios anillados  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  es dar una función continua  $f : X \rightarrow Y$  junto con un homomorfismo de anillos  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ . Si  $f$  es un homeomorfismo y  $f^\#$  es una equivalencia natural, decimos que  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  son isomorfos. Un espacio localmente anillado se dice un *esquema afín* si es isomorfo a  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$  para algún anillo conmutativo (con unidad)  $A$ .

Un *esquema* es un espacio topológico  $X$  localmente anillado (con gavilla estructural  $\mathcal{O}_X$ ) tal que todo punto de  $X$  admite una vecindad isomorfa a un esquema afín.

Si  $\mathcal{G}$  es una gavilla en  $Y$ , podemos definir la gavilla  $f^{-1}\mathcal{G}$  en  $X$  como sigue:

$$f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V).$$

**Recuerde** que existe una biyección  $\text{Hom}(\text{Spec } B, \text{Spec } A) \cong \text{Hom}(A, B)$ ; donde el primer Hom denota a los morfismos entre espacios anillados y el segundo a los homomorfismos entre anillos.

**Recuerde** las nociones de esquema *irreducible*, *reducido* y *entero*.

7. Una gavilla  $\mathcal{F}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo si para todo abierto  $U \subset X$  se cumple que  $\mathcal{F}(U)$  es un  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo y esta estructura es compatible con las restricciones. Observe que si  $X = \text{Spec } A$  es un esquema afín, todo  $\mathcal{O}_X$ -módulo queda completamente determinado por su valor en los abiertos (afines) básicos de la forma  $D(f)$  (véase 5). **Diremos** que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\widetilde{M}$  es una gavilla *casi coherente* si existe un  $A$ -módulo  $M$  tal que  $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$  para todo  $f \in A$ . En particular necesariamente se tiene  $M \cong \widetilde{M}(\text{Spec } A)$ . Si además el  $A$ -módulo  $M$  es finitamente generado diremos que  $\widetilde{M}$  es una gavilla *coherente*. Observe que en este caso el tallo de  $\widetilde{M}$  en  $p \in \text{Spec } A$  es isomorfo a  $M_p$ .

**Demuestre** las siguientes afirmaciones:

a) Si  $M$  y  $N$  son dos  $A$ -módulos, entonces  $\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ .

b) Dados  $A$ -módulos  $M_\alpha$  se tiene  $\widetilde{\bigoplus_\alpha M_\alpha} \cong \bigoplus_\alpha \widetilde{M}_\alpha$ .

c) Si  $h : A \rightarrow B$  es un homomorfismo de anillos y  $(f, f^\#) : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es el correspondiente morfismo de espacios anillados, entonces para todo  $B$ -módulo  $N$  se cumple que  $f_*\widetilde{N} \cong {}_A\widetilde{N}$ , donde  ${}_A\widetilde{N}$  denota a la gavilla casi-coherente (respectivamente coherente) asociada a  $N$  visto como  $A$ -módulo.

Más generalmente, dado un esquema  $X$  (no necesariamente afín), diremos que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{M}$  es casi coherente si existe una cubierta afín  $\{U_i\}$  de  $X$ ,

$U_i \cong \text{Spec } A_i$ , y  $A_i$ -módulos  $M_i$  tales que  $\mathcal{M}|_{U_i} \cong \widetilde{M}_i$  para todo  $i$ . Si además cada  $M_i$ -módulo es finitamente generado, diremos que  $\mathcal{M}$  es una gavilla coherente.

Observe que si  $(f, f^\#) : X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas, entonces la gavilla  $\mathcal{O}_X$  es siempre un  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -módulo (vía  $f^\#$ ) y, si  $\mathcal{G}$  es un  $\mathcal{O}_Y$ -módulo, entonces  $f^{-1}\mathcal{G}$  es un  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -módulo, por lo que podemos definir  $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ .

**Demuestre** que si  $X = \text{Spec } B$ ,  $Y = \text{Spec } A$  y  $M$  es un  $A$ -módulo, entonces  $f^*\widetilde{M} \cong \widetilde{M \otimes_A B}$ .

# Capítulo 2

## Morfismos

1. Recuerde que dados un esquema  $X$  y un punto  $x \in X$ , el tallo  $\mathcal{O}_x$  es un anillo local, en particular existe un único ideal máximo, que denotamos como  $\mathfrak{M}_x$ . Al campo  $\mathcal{O}_x/\mathfrak{M}_x$  lo llamamos el *campo residual* de  $x$  en  $X$  y lo denotamos como  $k(x)$ . **Demuestre** que si  $\mathbb{k}$  es un campo y  $X$  es un esquema, dar un morfismo de esquemas  $\text{Spec } \mathbb{k} \xrightarrow{x} X$  es equivalente a dar un punto  $x \in X$  tal que  $k(x) \hookrightarrow \mathbb{k}$ .<sup>1</sup>

**Ejemplo 2.0.1.** Si  $X = \text{Spec } \mathbb{Z}$  los únicos ideales primos son el ideal  $0$  y los ideales  $p\mathbb{Z}$ , con  $p \in \mathbb{N}$  un número primo. Los correspondientes campos residuales son:

$$k(0) = \mathbb{Q},$$
$$k(p) = \mathbb{F}_p.$$

De este modo, el único morfismo  $\text{Spec } \mathbb{Q} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  manda el ideal  $0 \subset \mathbb{Q}$  en el punto genérico  $(0) \subset \mathbb{Z}$  de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , en tanto que para todo primo  $p$ , el único morfismo  $\text{Spec } \mathbb{F}_p \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  manda el ideal  $0 \subset \mathbb{F}_p$  en el punto cerrado  $p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 2.0.2.** Si  $X = \text{Spec } \mathbb{Z}[x]$  hay varios tipos de ideales primos, a saber, el ideal  $0$ , los ideales primos de la forma  $(p) = p\mathbb{Z}[x]$ , con  $p$  un número primo, los ideales primos de la forma  $(f(x))$ , con  $f(x)$  un polinomio irreducible en  $\mathbb{Z}[x]$  y por último los ideales de la forma  $(p, f(x))$ , con  $p$  un ideal primo y  $f(x)$  un polinomio irreducible que induce un polinomio irreducible  $\bar{f}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ , estos últimos son claramente ideales máximos.

Los correspondientes campos residuales asociados son de la forma:

- $k(0) = \mathbb{Q}(x)$ ,
- $k(p) = \mathbb{F}_p(x)$ ,
- $k(f(x)) = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ ,
- $k(p, f(x)) = \mathbb{F}_p[x]/(\bar{f}(x))$ .

---

<sup>1</sup>Convénzase de que, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $X$  es afín y demuéstrello en ese caso.

De este modo, dar un morfismo  $\text{Spec } \mathbb{Q} \xrightarrow{x} \text{Spec } \mathbb{Z}[x]$  es equivalente a dar un punto  $x$  en  $\text{Spec } \mathbb{Z}[x]$  cuyo campo residual esté contenido en  $\mathbb{Q}$ , es decir, equivale a dar un ideal primo de la forma  $(ax - b)$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}$  primos relativos. En tanto que dar un morfismo de esquemas  $\text{Spec } \mathbb{F}_p \xrightarrow{x} \text{Spec } \mathbb{Z}[x]$  es equivalente a dar un ideal primo de la forma  $(p, f(x))$  con  $p$  primo y  $f(x)$  un polinomio irreducible tal que  $\bar{f}(x) = x - m$  con  $m \in \mathbb{F}_p$ . **Encuentre** un punto en  $\text{Spec } \mathbb{Z}[x]$  que defina a un morfismo de esquemas  $\text{Spec } \mathbb{Q}(\zeta) \xrightarrow{x} \text{Spec } \mathbb{Z}[x]$ , donde  $\zeta$  es una raíz cúbica primitiva de la unidad.

2. Recuerde que dados dos morfismos de esquemas  $f : X \rightarrow Z$  y  $h : Y \rightarrow Z$  podemos definir el *producto fibrado*  $X \times_Z Y$  como el único esquema que produce un cuadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Desde el punto de vista conjuntista, puede caracterizarse como las parejas  $(x, y) \in X \times Y$  tales que  $f(x) = h(y)$ , aunque esta descripción no hace explícita la estructura de esquema.

Un caso particular sumamente interesante es cuando se tiene un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  y un punto  $y \in Y$ , el punto  $y$  define (ver inciso previo) un morfismo de esquemas  $\text{Spec } k(y) \rightarrow Y$ , de modo que podemos construir el esquema  $X \times_Y \text{Spec } k(y)$ . A este esquema le llamamos la *fibra* de  $f$  en  $y$ . **Demuestre** que el espacio topológico subyacente al esquema  $X \times_Y \text{Spec } k(y)$  es homeomorfo a  $f^{-1}(y)$ . En particular es el conjunto vacío si  $y$  no está en la imagen de  $f$ .

**Ejemplo 2.0.3.** La inclusión natural  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[x]$  induce un morfismo de esquemas  $\text{Spec } \mathbb{Z}[x] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ . **Encuentre** las fibras de este morfismo tanto en el ideal primo cero como en los ideales primos  $(\mathfrak{p})$  de  $\mathbb{Z}$ .

3. Dado un espacio topológico  $X$ , consideremos el funtor  $\text{Hom}(-, X) : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{S}ets$  de la categoría de espacios topológicos a la categoría de conjuntos como sigue:

$$\mathcal{T}op \xrightarrow{\text{Hom}(-, X)} \mathcal{S}ets$$

$$Y \longmapsto \text{Hom}(Y, X)$$

donde  $\text{Hom}(Y, X)$  es el conjunto de funciones continuas de  $Y$  en  $X$ . Si  $y$  es un punto, existe una biyección entre el conjunto  $\text{Hom}(y, X)$  y el conjunto subyacente al espacio topológico  $X$ , pues toda función de  $y$  en  $X$  es continua. Si  $Z$  es otro espacio topológico, podemos restringir el funtor  $\text{Hom}(-, X)$  a la subcategoría

$\mathcal{T}op_Z$  de los subconjuntos abiertos de  $Z$ , donde los morfismos  $V \rightarrow U$  son las inclusiones abiertas. **Demuestre** que para toda cubierta abierta  $\{V_\alpha\}$  de  $U$ , el funtor  $\text{Hom}(-, X) : \mathcal{T}op_Z \rightarrow \mathcal{S}ets$  induce una sucesión exacta

$$\text{Hom}(U, X) \longrightarrow \prod_{\alpha} \text{Hom}(V_{\alpha}, X) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{res}_{\alpha, \beta}} \\ \xrightarrow{\text{res}_{\beta, \alpha}} \end{array} \prod_{\alpha \neq \beta} \text{Hom}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}, X),$$

es decir,  $\text{Hom}(U, X)$  es el ecualizador de las dos restricciones de la derecha. En particular, el funtor  $\text{Hom}(-, X)$  induce una gavilla de conjuntos en  $Z$ .

Más aún, demuestre que si  $X$  y  $Z$  son espacios localmente anillados, entonces el funtor  $\text{Hom}(-, X)$  induce una gavilla de conjuntos en el espacio anillado  $Z$ , donde en este caso  $\text{Hom}(U, X)$  es el conjunto de parejas  $(f, f^{\#})$ , con  $f : U \rightarrow X$  continua y  $f^{\#} : \mathcal{O}_x \rightarrow f_* \mathcal{O}_U$  una transformación natural de gavillas de anillos (lo que suele llamarse un homomorfismo de gavillas de anillos).

4. Más interesante es el caso en que  $X$  y  $Z$  son esquemas. En esta situación tenemos dos funtores distintos con el mismo nombre

$$\mathcal{T}op_Z \xrightarrow{\text{Hom}(-, X)} \mathcal{S}ets$$

donde, como antes,  $\text{Hom}(U, X)$  es el conjunto de parejas  $(f, f^{\#})$ . Además tenemos un funtor

$$\mathcal{R}ings \xrightarrow{\text{Hom}(-, X)} \mathcal{S}ets$$

$$A \longmapsto \text{Hom}(\text{Spec } A, X)$$

El segundo se conoce como el *functor de puntos* asociado a  $X$ . Observe que si restringimos este funtor a la subcategoría  $\mathcal{F}ields$ , entonces, para cada campo  $\mathbb{k}$ , el conjunto  $\text{Hom}(\text{Spec } \mathbb{k}, X)$  está en correspondencia biyectiva con el conjunto de puntos de  $X$  cuyo campo residual está contenido en  $\mathbb{k}$  (vease inciso 1), de ahí el nombre de funtor de puntos.

En el primer caso usaremos indistintamente las notaciones  $\text{Hom}(-, X)$  y  $\underline{X}$  para denotar al funtor  $\text{Hom}(-, X)$ ; en el caso del funtor de puntos, usaremos la notación  $X(\mathbb{k})$  para denotar al conjunto  $\text{Hom}(\text{Spec } \mathbb{k}, X)$  de *puntos  $\mathbb{k}$ -racionales* de  $X$ . También usaremos la notación  $X(A)$  cuando  $A$  es un anillo. Observe que, en virtud de lo discutido en el numeral 3, puesto que  $X$  y  $Z$  son espacios localmente anillados, el funtor  $\underline{X}$  define una gavilla de conjuntos en el esquema  $Z$ . Observe finalmente que, siendo una gavilla, podríamos haberla definido sencillamente indicando su valor en los abiertos afines de  $Z$ , como se observa (sin mencionar que  $\underline{X}$  es una gavilla) en uno de los ejercicios de Hartshorne.



# Capítulo 3

## Morfismos planos.

Siguiendo más o menos el espíritu del libro de Hartshorne, comenzaremos hablando de los morfismos planos y algunas de sus propiedades, para mas adelante estudiar morfismos lisos y morfismos étale.

No será sino hasta después de hablar de los morfismos étale cuando realmente comenzaremos con el estudio de los sitios de Grothendieck, pues me parece que en ese momento ya se tendrá la madurez suficiente para aproximarse a este concepto.

A partir de este momento, el formato de estas notas será un poco mas ortodoxo, siguiendo el orden tradicional de definir, ejemplificar y proponer propiedades. Como siempre, los anillos que consideraremos serán anillos conmutativos con unidad.

**Definición.** Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo. Diremos que  $M$  es  $A$ -plano (o simplemente *plano* cuando no haya lugar a confusión) si, para toda sucesión exacta corta de  $A$ -módulos

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow N' \otimes M \longrightarrow N \otimes M \longrightarrow N'' \otimes M \longrightarrow 0$$

es exacta.

Diremos que un  $A$ -módulo  $M$  es *fielmente plano* si para cualesquiera  $A$ -módulos  $N, N'$  y  $N''$ , la sucesión

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

es exacta si y sólo si la sucesión

$$0 \longrightarrow N' \otimes M \longrightarrow N \otimes M \longrightarrow N'' \otimes M \longrightarrow 0$$

es exacta.

**Ejemplo 3.0.1.** *Claramente el propio anillo  $A$  es un  $A$ -módulo fielmente plano, puesto que  $M \otimes_A A \cong M$  para todo  $A$ -módulo  $M$  y los morfismos  $f \otimes \text{id} : M \otimes_A A \rightarrow N \otimes_A A$  se identifican de manera canónica con los morfismos  $f : M \rightarrow N$ . En consecuencia, cualquier  $A$ -módulo libre es un  $A$ -módulo fielmente plano, pues el producto tensorial conmuta con la suma directa.*

**Ejemplo 3.0.2.** *En particular, si  $A = \mathbb{k}$  es un campo, todo  $\mathbb{k}$ -módulo es plano.*

**Ejemplo 3.0.3.**  $\mathbb{Q}$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo plano, como se sigue de la proposición 3.0.5, inciso c), pues es la localización de  $\mathbb{Z}$  en el sistema multiplicativo  $\mathbb{Z} - \{0\}$ ; en contraste,  $\mathbb{F}_p$  no es un  $\mathbb{Z}$ -módulo plano. En efecto, considere la sucesión exacta de  $\mathbb{Z}$ -módulos

$$0 \rightarrow p \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow 0.$$

Esta no se mantiene exacta después de tensorizar con  $\mathbb{F}_p$ , pues  $p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = 0$ , en tanto que  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p$ , pero  $\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \not\cong \mathbb{F}_p$ .

**Lema 3.0.4.** Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1)  $M$  es  $A$ -plano,
- 2) Para toda pareja de  $A$ -módulos  $N$  y  $N'$ , si

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N$$

es exacta, entonces

$$0 \rightarrow N' \otimes_A M \rightarrow N \otimes_A M$$

es exacta.

- 3) Para todo ideal finitamente generado  $I \subset A$ , la sucesión

$$0 \rightarrow I \otimes_A M \rightarrow A \otimes_A M \cong M$$

es exacta, es decir,  $I \otimes_A M \cong IM$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver Matsumura.

**Proposición 3.0.5.** Sean  $A$  y  $B$  anillos,  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos,  $M$  un  $A$ -módulo y  $N$  un  $B$ -módulo.

- a) (Extensión de base) Si  $M$  es  $A$ -plano, entonces  $M \otimes_A B$  es  $B$ -plano.
- b) (Transitividad) Si  $B$  es una  $A$ -álgebra plana (i.e., es una  $A$ -álgebra que es a su vez un  $A$ -módulo plano) y  $N$  es  $B$ -plano, entonces  $N$  es  $A$ -plano.
- c) (Localización) Si  $S \subset A$  es un conjunto multiplicativo (i.e. un conjunto multiplicativamente cerrado que no contiene al cero), entonces  $S^{-1}A$  es un  $A$ -módulo plano.
- d) Sea  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta corta de  $A$ -módulos. Si  $M'$  y  $M''$  son planos, entonces  $M$  es plano. Por otro lado, si  $M$  y  $M''$  son planos, entonces  $M'$  es plano.

DEMOSTRACIÓN. a) Basta recordar que  $(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A N$ .

b) Es suficiente considerar sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$$

para ideales  $I$  de  $A$  y trabajar con la sucesión exacta corta correspondiente para  $I \cdot B$ .



c) Por el lema 3.0.4, es suficiente demostrar que si  $N$  es un submódulo de  $M$ , entonces  $N \otimes_A S^{-1}A$  es un submódulo de  $M \otimes_A S^{-1}A$ ; pero  $N \otimes_A S^{-1}A = S^{-1}N$ , en tanto que  $M \otimes_A S^{-1}A = S^{-1}M$ . Supongamos que  $x/n \in S^{-1}N$  es distinto de cero en  $S^{-1}N$ , pero es cero en  $S^{-1}M$ , entonces existe  $s \in S$  tal que  $sx = 0 \in M$ , pero  $0 \rightarrow N \rightarrow M$  es exacta y  $sx \in N$ , entonces  $sx = 0 \in N$ , por tanto  $x/n = 0 \in S^{-1}N$ .

d) Dada una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0,$$

considere el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N' \otimes M' & \longrightarrow & N \otimes M' & \longrightarrow & N'' \otimes M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' \otimes M & \longrightarrow & N \otimes M & \longrightarrow & N'' \otimes M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' \otimes M'' & \longrightarrow & N \otimes M'' & \longrightarrow & N'' \otimes M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

y deduzca la exactitud de la primera o segunda fila a partir de la exactitud de las filas restantes.  $\diamond$

**Lema 3.0.6.** *Si  $A$  es un anillo local, entonces un  $A$ -módulo finitamente generado  $M$  es plano si y sólo si  $M$  es libre.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\mathfrak{M}$  el ideal máximo de  $A$  y  $\mathbb{k} = A/\mathfrak{M}$ . Si  $M$  es un  $A$ -módulo plano finitamente generado, entonces  $M/\mathfrak{M}M$  es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial finitamente generado. Observe que  $\{m_1, \dots, m_n\}$  es un conjunto de generadores de  $M$  si y sólo si  $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n\}$  genera a  $M/\mathfrak{M}M$ . En efecto, si  $\{m_1, \dots, m_n\}$  genera a  $M$ , claramente  $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n\}$  genera a  $M/\mathfrak{M}M$ . Recíprocamente, supongamos que  $\{m_1, \dots, m_n\}$  genera a un submódulo  $N$  de  $M$ , pero  $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n\}$  genera a  $M/\mathfrak{M}M$ , entonces podemos escribir  $M = N + \mathfrak{M}M$  y, por el lema de Nakayama,  $M = N$ .

Supongamos ahora que  $\{m_1, \dots, m_n\}$  es un conjunto de generadores de  $M$  y que  $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n\}$  es una base de  $M/\mathfrak{M}M$ , en particular,  $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n\}$  es linealmente independiente. Demostremos por inducción que en este caso  $\{m_1, \dots, m_n\}$  es  $A$ -linealmente independiente.

Si  $n = 1$ , supongamos que  $\bar{m} \neq 0$  pero que existe  $a \in A$  tal que  $am = 0$ , entonces existen  $x_1, \dots, x_r \in M$  y  $b_1, \dots, b_r \in A$  tales que

- $m = \sum_i b_i x_i$  y además
- $ab_i = 0$  para toda  $i$ .

Puesto que  $\bar{m} \neq 0$ , existe  $b_i \notin \mathfrak{M}$ , pero entonces  $b_i \in A - \mathfrak{M}$  es necesariamente una unidad y como  $ab_i = 0$  concluimos que  $a = 0$ .

Supongamos ahora que  $n > 1$  y que se tiene una relación de dependencia lineal como  $A$ -módulos, es decir  $\sum_{i=1}^n a_i m_i = 0$ ; entonces existen  $x_1, \dots, x_r \in M$  y  $b_{ij} \in A$  tales que:

- a)  $m_i = \sum_j b_{ij} x_j$  y  
b)  $\sum_i a_i b_{ij} = 0$ .

Como por hipótesis  $\{\bar{m}_k\}$  es l.i., en particular  $m_n \notin \mathfrak{M}M$ , es decir,  $b_{nj} \notin \mathfrak{M}$  para al menos un índice  $j$ . Puesto que  $a_1 b_{1j} + \dots + a_n b_{nj} = 0$  y  $b_{nj}$  es una unidad, entonces podemos escribir

$$(3.0.1) \quad a_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i \quad \text{donde} \quad c_i = b_{ij}/b_{nj}.$$

Por tanto

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i m_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i m_i + \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i \right) m_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (m_i + c_i m_n);$$

pero el conjunto  $\{\bar{m}_1 + c_1 \bar{m}_n, \dots, \bar{m}_{n-1} + c_{n-1} \bar{m}_n\}$  es l.i., luego por inducción concluimos que  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$  y en consecuencia también  $a_n = 0$  (ver ecuación (3.0.1)).

◇

**Definición.** Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades se dice *plano*, si, para todo punto  $x \in X$ ,  $f_* \mathcal{O}_{x,X}$  es un  $\mathcal{O}_{y,Y}$  módulo plano, donde  $y = f(x)$ .

**Ejemplo 3.0.7.** *Todo morfismo  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{k}$  es plano.*

**Ejemplo 3.0.8.** *Toda inmersión abierta es un morfismo plano, pues evidentemente  $\mathcal{O}_{y,Y}$  es un  $\mathcal{O}_{y,Y}$ -módulo plano.*

**Ejemplo 3.0.9.** *Por definición, la planitud de un morfismo  $f$  es un asunto local tanto en el dominio como en el contradominio, por tanto para todo anillo  $A$ , el morfismo  $\mathbb{A}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$  (y en consecuencia también el morfismo  $\mathbb{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$ ) es plano, pues para todo  $x \in \mathbb{A}_A^n$  se tiene  $f_* \mathcal{O}_{x, \mathbb{A}_A^n} \cong \bigoplus \mathcal{O}_{f(x), \text{Spec } A}$  que es un módulo libre y por tanto plano.*

**Ejemplo 3.0.10.** *Más generalmente, sea  $X$  una variedad y sea  $\mathcal{E}$  una gavilla localmente libre de rango  $r + 1$  sobre  $X$ . Construyamos la gavilla de  $\mathcal{O}_X$ -álgebras  $\text{Sym } \mathcal{E} := \bigoplus_k \text{Sym}^k \mathcal{E}$ , donde  $\text{Sym}^k \mathcal{E} := \mathcal{E} \otimes \dots \otimes \mathcal{E} / S_k$  con  $S_k$  el grupo de permutaciones de  $k$  puntos y el producto tensorial tiene  $k$  factores.*

*No es difícil ver que  $\text{Sym}^k \mathcal{E}$  es localmente isomorfo al submódulo de polinomios homogéneos de grado  $k$  en  $r + 1$  variables, con el isomorfismo dado por*

$$v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \rightarrow x_{i_1} \dots x_{i_k},$$

donde los  $v_j$  son una base local de  $\mathcal{E}$ .

Como  $\text{Sym } \mathcal{E}$  es una  $\mathcal{O}_X$ -álgebra graduada, podemos definir las variedades  $\text{Spec}(\text{Sym } \mathcal{E})$  y  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) := \text{Proj}(\text{Sym } \mathcal{E})$ .

El morfismo natural  $p$  de  $\text{Spec}(\text{Sym } \mathcal{E})$  en  $X$  (al igual que el de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) := \text{Proj}(\text{Sym } \mathcal{E})$  en  $X$ ) es plano, pues  $p_*\mathcal{O}_{z, \text{Sym } \mathcal{E}} = \mathcal{E}_{p(z)}$ , que es un  $\mathcal{O}_{p(z)}$  módulo libre, luego plano.

**Ejemplo 3.0.11.** Si  $S$  es una superficie reglada con base una curva  $C$ , entonces el morfismo natural de  $S$  en  $C$  es un morfismo plano, pues  $S = \mathbb{P}(\mathcal{E})$  para alguna gavilla localmente libre de rango 2.

**Teorema 3.0.12.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo plano y  $g : Z \rightarrow Y$  es un morfismo arbitrario, entonces el morfismo canónico  $Z \times_Y X \rightarrow Z$  es un morfismo plano.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la planitud es local tanto en el dominio como en el contra-domínio, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $X = \text{Spec } B$ ,  $Y = \text{Spec } C$  y  $Z = \text{Spec } A$ , por tanto  $Z \times_Y X = \text{Spec}(A \otimes_C B)$  y la afirmación es consecuencia de la proposición 3.0.5.  $\diamond$

**Ejemplo 3.0.13.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es plano e  $y \in Y$  con campo de cocientes  $K = k(y)$ , consideremos el morfismo  $y : \text{Spec } K \rightarrow Y$  definido por el punto  $y$ . Si  $y \notin \text{Im } f$ , entonces  $X_y = X \times_Y \text{Spec } K = \emptyset$ ; en caso contrario,  $X_y$  no es vacío y, en virtud del teorema precedente, el morfismo canónico  $X_y \rightarrow \text{Spec } K$  es un morfismo plano (coincidiendo con la afirmación hecha en el ejemplo 3.0.7).

**Ejemplo 3.0.14.** Puesto que si  $K$  es un campo, todo morfismo  $X \rightarrow \text{Spec } K$  es plano, el teorema 3.0.12 nos dice que para todo  $K$ -esquema  $Z$  y todo  $K$ -esquema  $X$ , la proyección canónica  $Z \times X \rightarrow Z$  es un morfismo plano.

Recuerde que para todo esquema proyectivo  $X$ , si  $\mathcal{L}$  es una gavilla muy amplia, entonces  $\dim H^k(X, \mathcal{L}^n) < \infty$  para todo  $k \geq 0$  y para todo  $n \geq 0$ ; podemos por tanto definir la *función de Hilbert* de  $X$  mediante

$$f(n) = \dim H^k(X, \mathcal{L}^n)$$

y sabemos que existe un polinomio  $h$ , llamado el *polinomio de Hilbert* de  $X$  tal que  $f(n) = h(n) \quad \forall n \gg 0$ .

**Teorema 3.0.15.** Dados un esquema entero y noetheriano  $T$  y un subesquema cerrado  $X \subset \mathbb{P}_T^n$ , para todo  $t \in T$  la fibra  $X_t \subset \mathbb{P}_{k(t)}^n$  es un esquema proyectivo con polinomio de Hilbert  $h_t$  y la proyección canónica  $X \rightarrow T$  es un morfismo plano si y sólo si los polinomios de Hilbert  $h_t$  no dependen de  $t$ .

DEMOSTRACIÓN. Hartshorne.

## Adendum a Morfismos planos

Permítaseme agregar algunos ejemplos y algunos resultados sobre morfismos planos que nos serán útiles en el futuro.

**Ejemplo 3.0.16.** *Para cualquier anillo conmutativo  $A$ , el  $A$ -módulo  $0$  es plano, como se demuestra trivialmente.*

**Ejemplo 3.0.17.** *Dado un anillo  $A$  y  $f \in A$  un elemento que no es divisor de cero, sabemos que el abierto  $D(f) \subset \text{Spec } A$  es un esquema afín isomorfo a  $\text{Spec } A_f$  y que la inclusión abierta correspondiente  $\text{Spec } A_f \hookrightarrow \text{Spec } A$  es un morfismo plano.*

Si ahora consideramos  $Z = V(f) \cong \text{Spec } A/(f)$ , entonces el diagrama cartesiano siguiente

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A/(f) \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } A_f & \longrightarrow & \text{Spec } A_f \\ g \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A/(f) & \hookrightarrow & \text{Spec } A \end{array}$$

corresponde al diagrama de anillos

$$\begin{array}{ccc} 0 \cong A/(f) \otimes_A A_f & \longleftarrow & A_f \\ \uparrow & & \uparrow \\ A/(f) & \longleftarrow & A \end{array}$$

y el morfismo  $g$  es, efectivamente, un morfismo plano. Observe que el espacio topológico subyacente a  $\text{Spec } A/(f) \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } A_f = \emptyset = \text{Spec } 0$ , de ahí que convengamos en decir, sin mayor atención, que el morfismo  $\emptyset \rightarrow X$  es un morfismo plano para cualquier esquema  $X$ .

**Lema 3.0.18.** *Dados una  $A$ -álgebra  $B$ , un ideal primo  $\mathfrak{p} \subset B$  y un  $A$ -módulo  $N$ , para todo entero  $i$  se tiene*

$$(Tor_i^A(B, N))_{\mathfrak{p}} = Tor_i^{A_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}).$$

donde  $p = \mathfrak{p} \cap A$ .

DEMOSTRACIÓN. Matsumura.

**Proposición 3.0.19.** *Dado un homomorfismo de anillo  $f : A \rightarrow B$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $B$  es un  $A$ -módulo plano.
2.  $B_{\mathfrak{p}}$  es un  $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo plano para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ , donde  $p = f^{-1}(\mathfrak{p})$ .
3.  $B_{\mathfrak{M}}$  es un  $A_m$ -módulo plano para todo ideal máximo  $\mathfrak{M} \subset B$ , donde  $m = f^{-1}(\mathfrak{M})$ .

DEMOSTRACIÓN. 1) $\Rightarrow$  2): El anillo  $B_p = B \otimes_A A_p$  es  $A_p$  plano por cambio de base, mientras que  $B_p$  es  $B_p$ -plano, en tanto es una localización de  $B_p$ ; luego por transitividad se tiene que  $B_p$  es  $A_p$ -plano.

2) $\Rightarrow$  3) es evidente, pues todo ideal máximo es un ideal primo.

3)  $\Rightarrow$  1): Basta demostrar que la hipótesis en 3) entraña la igualdad  $Tor_i^A(B, N) = 0$  para todo  $A$ -módulo  $N$ , pero dado que  $B_{\mathfrak{M}}$  es  $A_m$ -plano, para todo  $A_m$  módulo  $M$  se tiene  $Tor_i^{A_m}(B_{\mathfrak{M}}, M) = 0$ , a fortiori para los  $A_m$ -módulos de la forma  $M = N_m$  y, por el lema precedente, tenemos que para todo  $A$ -módulo  $N$  se cumple  $(Tor_i^A(B, N))_{\mathfrak{M}} = 0$  para todo ideal máximo  $\mathfrak{M}$ , de donde se concluye que  $Tor_i^A(B, N) = 0$ .  $\diamond$

Esta proposición justifica que la definición de morfismo plano sólo considere la planitud de los tallos de la gavilla  $f_*\mathcal{O}$ .

**Observación.** En virtud de la proposición precedente, si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo entre dos  $\mathbb{k}$ -esquemas de tipo finito,  $f$  es plano si y sólo si es plano en todos los puntos *cerrados*. Recuerde que los puntos cerrados coinciden con los puntos  $\mathbb{k}$ -racionales si y sólo si  $X$  es un  $\mathbb{k}$ -esquema y  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado. Recuerde también que si  $X$  no es un esquema sobre  $\mathbb{k}$ , los puntos cerrados pueden no ser densos, como lo ilustra el caso de  $\text{Spec } R$  con  $R$  un anillo de valuación discreta.



# Capítulo 4

## Diferenciales de Kähler.

### 4.1. Diferenciales de Kähler I.

En esta sección  $A$  será un anillo conmutativo con unidad,  $B$  será una  $A$ -álgebra y  $M$  será un  $B$ -módulo.

**Definición.** Una  $A$ -derivación de  $B$  en  $M$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos  $d : B \rightarrow M$  tal que

1.  $d(bb') = bdb' + b'db$  para toda pareja  $b, b' \in B$ ,
2.  $d(1) = 0$ .

**Ejemplo 4.1.1.** Toda  $\mathbb{Z}$  derivación de  $\mathbb{Q}$  es trivial. en efecto, si  $V$  es un  $\mathbb{Q}$  espacio vectorial y  $d : \mathbb{Q} \rightarrow V$  es una  $\mathbb{Z}$ -derivación, entonces para todo  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  tenemos

$$0 = a \cdot d(1) = d(a \cdot 1) = d(b \cdot \frac{a}{b}) = b \cdot d(\frac{a}{b})$$

pero  $b \in \mathbb{Q} - \{0\}$  es una unidad y  $V$  es un  $\mathbb{Q}$ -módulo, por tanto concluimos que  $d(\frac{a}{b}) = 0$ .

**Ejemplo 4.1.2.** Más generalmente, si  $A$  es un anillo,  $S \subset A$  es un conjunto multiplicativo y  $B = S^{-1}A$ , entonces toda  $A$ -derivación de  $B$  es trivial.

**Ejemplo 4.1.3.** Si  $A = \mathbb{R}$  y  $B = \mathbb{C}$ , toda  $\mathbb{R}$ -derivación de  $\mathbb{C}$  en cualquier  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $V$  es necesariamente trivial. En efecto, si  $d : \mathbb{C} \rightarrow V$  es una  $\mathbb{R}$ -derivación y  $z = x + iy$ , entonces dado que  $d$  es un homomorfismo de  $\mathbb{R}$ -módulos se tiene

$$d(x + iy) = d(x) + d(iy) = xd(1) + yd(i) = yd(i)$$

puesto que  $d(1) = 0$ . Por otro lado, puesto que  $i^2 = -1$ , tenemos que

$$0 = d(1) = -1d(1) = d(-1) = d(i^2) = id(i) + id(i) = 2d(i)$$

pero como los  $\mathbb{C}$  espacios vectoriales son libres de torsión, entonces  $d(i) = 0$ .

**Ejemplo 4.1.4.** Más generalmente, si  $K$  es un campo y  $L$  es una extensión algebraica y separable de  $K$ , toda  $K$ -derivación de  $L$  en cualquier  $L$ -espacio vectorial es trivial.

En efecto, sea  $V$  un  $L$ -espacio vectorial y sea  $d : L \rightarrow V$  una  $K$ -derivación; dado  $b \in L$  sea  $f(x) = x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$  el polinomio irreducible de  $b$  sobre  $K$ , entonces  $f(b) = 0 \in K$  y por tanto

$$0 = d(f(b)) = d(b^m) + \sum_{i=0}^{m-1} d(a_i b^i) = mb^{m-1}d(b) + \sum_{j=0}^{m-1} ja_j b^{j-1} db = f'(b)db.$$

Como  $L/K$  es una extensión algebraica y separable, entonces  $f'(b) \neq 0 \in L$ , por tanto es una unidad en  $L$  y, como antes, concluimos que  $db = 0$ .

**Ejemplo 4.1.5.** Si  $K$  es un campo,  $B = K[x]$  y  $M$  es un  $K[x]$ -módulo, entonces toda  $K$ -derivación de  $K[x]$  en  $M$  está totalmente determinada por el valor de  $d(x)$ .

En efecto, para todo polinomio  $f(x) = \sum_j a_j x^j \in K[x]$  se cumple que

$$d(f(x)) = \sum_j d(a_j x^j) = \sum_j a_j d(x^j) = \sum_j ja_j x^{j-1} dx = f'(x)dx.$$

**Definición.** Definimos el *módulo de  $A$ -formas diferenciales relativas* en  $B$  como un  $B$ -módulo  $\Omega_{B/A}$ , junto con una  $A$ -derivación  $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  que satisface la siguiente propiedad universal:

Para todo  $B$ -módulo  $M$  y para toda  $A$ -derivación  $d' : B \rightarrow M$  existe un único homomorfismo de  $B$ -módulos  $f : \Omega_{B/A} \rightarrow M$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{d} & \Omega_{B/A} \\ & \searrow d' & \downarrow f \\ & & M \end{array}$$

conmuta.

**Lema 4.1.6.** El módulo de  $A$ -formas diferenciales relativas existe y es único salvo isomorfismo único.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $F$  el  $B$ -módulo libre generado por los símbolos  $\{db \mid b \in B\}$  y tomemos  $\Omega_{B/A}$  como el  $B$ -módulo que se obtiene de tomar el cociente de  $F$  por el submódulo generado por todas las expresiones de la forma

- $d(b + b') - d(b) - d(b')$ ,
- $d(bb') - bd(b') - b'd(b)$ ,
- $d(a) = 0$  para todo  $a \in A$ .



La unicidad es clara. ◇

**Proposición 4.1.7.** *Sean  $B$  una  $A$ -álgebra,  $f : B \otimes_A B \rightarrow B$  el homomorfismo diagonal dado por  $f(b \otimes b') = bb'$  y  $J = \text{Ker } f$ ; si pensamos a  $B \otimes_A B$  como un  $B$ -módulo mediante multiplicación por la izquierda, entonces  $J/J^2$  hereda una estructura de  $B$ -módulo. Si ahora definimos  $d_J : B \rightarrow J/J^2$  mediante  $d_J(b) = 1 \otimes b - b \otimes 1 \pmod{J^2}$ , entonces  $(J/J^2, d_J)$  es un módulo de  $A$ -formas diferenciales relativas para  $B$ .*

DEMOSTRACIÓN. Comencemos observando que  $d_J$  es  $A$ -lineal. En efecto,

$$d_J(ab) = 1 \otimes ab - ab \otimes 1 = a \otimes b - ab \otimes 1 = a(1 \otimes b - b \otimes 1)$$

para todo  $a \in A$  y  $b \in B$ .

Por otra parte, si  $x, y \in B$ , entonces  $d_J(xy) = 1 \otimes xy - xy \otimes 1 \pmod{J^2}$ , pero

$$\begin{aligned} 1 \otimes xy - xy \otimes 1 &= x(1 \otimes y - y \otimes 1) - x \otimes y + y(1 \otimes x - x \otimes 1) - y \otimes x \\ &\quad + xy \otimes 1 + 1 \otimes xy \\ &= xd_J(y) + yd_J(x) + xy \otimes 1 + 1 \otimes xy - x \otimes y - y \otimes x \end{aligned}$$

y como

$$xy \otimes 1 + 1 \otimes xy - x \otimes y - y \otimes x = (x \otimes 1 - 1 \otimes x) \cdot (y \otimes 1 - 1 \otimes y) \in J^2,$$

se sigue que  $d_J(xy) = xd_J(y) + yd_J(x)$ .

Una consecuencia de que  $d_J$  satisfaga la regla de Leibniz es que  $d(1) = 0$ .

Pasemos ahora a verificar que se cumple la propiedad universal: Recordemos que  $B \otimes_A B$  es un  $B$ -módulo vía multiplicación por la izquierda, de modo que para todo  $x, y \in B$  tenemos

$$x \otimes y = xy \otimes 1 + x(1 \otimes y - y \otimes 1) = f(x \otimes y) \otimes 1 + x\tilde{d}y,$$

donde  $\tilde{d}y = 1 \otimes y - y \otimes 1$ ; así que

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i \left( f(x_i \otimes y_i) \otimes 1 + x_i \tilde{d}y_i \right) = \left( \sum_i f(x_i \otimes y_i) \right) \otimes 1 + \sum_i x_i \tilde{d}y_i = \sum_i x_i \tilde{d}y_i$$

para todo  $\sum x_i \otimes y_i \in J = \text{Ker } f$  y como por construcción  $\tilde{d}y \pmod{J^2} = d_J y$  para todo  $y \in B$ , concluimos que todo elemento de  $J/J^2$  se puede escribir como

$$\sum_i x_i d_J y_i$$

de modo que  $J/J^2$  es un  $B$ -módulo generado por  $\{d_J y \mid y \in B\}$ .

Dada una  $A$ -derivación  $D : B \rightarrow M$ , donde  $M$  es un  $B$ -módulo, puesto que  $D(1) = 0$  y dado que  $D$  satisface la regla de Leibniz, podemos definir  $f : J/J^2 \rightarrow M$  mediante

$f(d_J y) = Dy$ . No es difícil demostrar que  $f$  está bien definida y es un homomorfismo de  $A$ -módulos. Claramente satisface  $f \circ d_J y = Dy$  para toda  $y \in B$  y como los  $d_J y$  generan a  $J/J^2$ ,  $f$  es el único homomorfismo con esta propiedad.  $\diamond$

**Proposición 4.1.8.** *Si  $A'$  y  $B$  son  $A$ -álgebras y  $B' = B \otimes_A A'$ , entonces  $\Omega_{B'/A'} \cong \Omega_{B/A} \otimes_B B'$ . Más aún, para todo sistema multiplicativo  $S$  se tiene  $\Omega_{S^{-1}B/A} \cong S^{-1}\Omega_{B/A}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.

**Ejemplo 4.1.9.** *Si  $B = A[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo de polinomios sobre  $A$ , entonces  $\Omega_{B/A}$  es un  $B$ -módulo libre generado por  $dx_1, \dots, dx_n$ , como se sigue de la proposición precedente y del ejemplo 4.1.5.*

## 4.2. Diferenciales de Kähler II

Observe que una consecuencia inmediata de la propiedad universal del módulo de diferenciales relativas es que existe un isomorfismo de  $B$ -módulos

$$\text{Der}_A(B, M) \cong \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M)$$

para todo  $B$ -módulo  $M$ .

En el lenguaje categórico parafraseamos la existencia de este isomorfismo diciendo que  $\Omega_{B/A}$  representa al funtor covariante

$$B - \text{mód} \xrightarrow{\text{Der}_A(B, -)} B - \text{mód}$$

$$M \longmapsto \text{Der}_A(B, M)$$

El  $A$ -homomorfismo  $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  se llama la *derivación canónica* y ocasionalmente lo denotaremos también mediante  $d_{B/A}$  para evitar posibles confusiones.

Para cualquier natural  $r$  escribimos  $\Omega_{B/A}^r := \Lambda^r \Omega_{B/A}$ , de modo que  $\Omega_{B/A}^1 := \Omega_{B/A}$ .

**Proposición 4.2.1.** (*Primera sucesión exacta*). *Dados anillos  $A, B$  y  $C$  y homomorfismos  $A \rightarrow B$  y  $B \rightarrow C$ , se tiene una sucesión exacta de  $C$ -módulos*

$$(4.2.1) \quad \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C/B} \longrightarrow 0.$$

Más aún,  $\alpha$  tiene un inverso izquierdo (es decir  $\alpha$  es inyectivo e  $\text{Im } \alpha$  es un sumando directo de  $\Omega_{C/A}$  como  $C$ -módulo) si y sólo si toda  $A$ -derivación de  $B$  en cualquier  $C$ -módulo  $T$  se puede extender a una  $A$ -derivación de  $C$  en  $T$ .

DEMOSTRACIÓN. I) El homomorfismo  $\alpha$  lo definimos mediante

$$\alpha(d_{B/A}(b) \otimes c) = c \cdot d_{C/A}(b),$$

en tanto que el homomorfismo  $\beta$  lo definimos como

$$\beta(c \cdot d_{C/A}(c')) = c \cdot d_{C/B}(c').$$

De la primera construcción del módulo de formas diferenciales relativas se sigue que  $\Omega_{C/B}$  está generado por  $\{d_{C/B}(c) \mid c \in C\}$ , por lo que  $\beta$  es suprayectivo y puesto que  $d_{C/B}(b) = 0$ , entonces  $\beta \circ \alpha = 0$  y la sucesión (4.2.1) existe y es exacta por la derecha. Falta por tanto demostrar que  $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$ .

Demostremos que para todo  $C$ -módulo  $T$  la sucesión (4.2.1) induce una sucesión exacta

$$(4.2.2) \quad \text{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T)$$

mediante precomposición con  $\beta$  y  $\alpha$  respectivamente. En particular, si  $T = \Omega_{C/A} / \text{Im } \alpha$ , la proyección natural  $\Omega_{C/A} \xrightarrow{\pi} \Omega_{C/A} / \text{Im } \alpha = \text{Coker } \alpha$  induce el homomorfismo

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{0} \text{Coker } \alpha,$$

por tanto provendrá de un morfismo  $\gamma : \Omega_{C/B} \rightarrow \text{Coker } \alpha$  vía precomposición con  $\beta$ , pero entonces  $\pi(\text{Ker } \beta) = \gamma \circ \beta(\text{Ker } \beta) = 0 \in \Omega_{C/A}/\text{Im } \alpha$ , es decir,  $\text{Ker } \beta \subset \text{Im } \alpha$ .

La exactitud de la sucesión (4.2.2) es consecuencia de los isomorfismos canónicos

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T) &\cong \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, T) \cong \text{Der}_A(B, T), \\ \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T) &\cong \text{Der}_A(C, T) \end{aligned}$$

y

$$\text{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T) \cong \text{Der}_B(C, T);$$

lo que permite identificar la sucesión (4.2.2) con la sucesión

$$\text{Der}_B(C, T) \rightarrow \text{Der}_A(C, T) \rightarrow \text{Der}_A(B, T),$$

que es evidentemente exacta.

Finalmente, todo homomorfismo de  $C$ -módulos  $h : M \rightarrow N$  tiene un inverso izquierdo si y sólo si el homomorfismo inducido mediante precomposición

$$\text{Hom}_C(N, T) \rightarrow \text{Hom}_C(M, T)$$

es suprayectivo para todo  $C$ -módulo  $T$ , por tanto  $\alpha$  tiene un inverso izquierdo  $\delta : \Omega_{C/A} \rightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C$  si y sólo si el homomorfismo natural  $\text{Der}_A(C, T) \rightarrow \text{Der}_A(B, T)$  es suprayectivo para todo  $C$ -módulo  $T$ .  $\diamond$

**Corolario 4.2.2.** *El homomorfismo  $\Omega_{B/A} \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}$  es un isomorfismo si y sólo si toda  $A$ -derivación de  $C$  en un  $B$ -módulo  $T$  se puede extender de manera **única** a una  $A$ -derivación de  $B$  en  $T$ .*

$\diamond$

**Proposición 4.2.3.** *(Segunda sucesión exacta). Para toda  $A$ -álgebra  $B$  y todo ideal  $I \subset B$ ,*

1. *existe una sucesión exacta de  $C := B/I$ -módulos*

$$(4.2.4) \quad I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\rho} \Omega_{C/A} \longrightarrow 0,$$

*donde,  $\delta(\bar{b}) := d(b) \otimes 1$  para todo  $\bar{b} \in I/I^2$ . Observe en particular que  $I/I^2$  admite una estructura de  $C$ -módulo y que  $\delta$  es una transformación  $C$ -lineal.*

2. *Si  $C' = B/I^2$ , entonces  $\Omega_{B/A} \otimes_B C \cong \Omega_{C'/A} \otimes_{C'} C$ .*

3. El homomorfismo  $\delta$  tiene una inversa izquierda si y sólo si la extensión

$$0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow 0$$

es una extensión trivial de  $A$ -módulos.

DEMOSTRACIÓN. 1) Puesto que  $B \rightarrow C$  es suprayectivo, toda  $B$ -derivación de  $C$  en cualquier  $C$ -módulo  $T$  es trivial, i.e.,

$$d(\bar{b}) = d(b \cdot \bar{1}) = bd(\bar{1}) = 0;$$

para todo  $\bar{b} \in C$ ; por tanto  $\Omega_{C/B} = 0$  y la suprayectividad de  $\rho$  se sigue de la proposición 4.2.1.

Evidentemente  $\rho \circ \delta = 0$ , por lo que, análogo a la demostración de la proposición mencionada, es suficiente con demostrar la exactitud de la sucesión

$$\text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T) \rightarrow \text{Hom}_C(I/I^2, T)$$

para cualquier  $C$ -módulo  $T$ . Pero recuerde que esta sucesión puede reescribirse como (véanse los isomorfismos (4.2.3)):

$$\text{Der}_A(B/I, T) = \text{Der}_A(C, T) \rightarrow \text{Der}_A(B, T) \rightarrow \text{Hom}_B(I, T),$$

donde el último homomorfismo está dado por  $D \mapsto D|_I$ , lo que demuestra la exactitud.

2) Claramente, un homomorfismo de  $C$ -módulos  $N' \rightarrow N$  es un isomorfismo si y sólo si el homomorfismo inducido  $\text{Hom}_C(N, T) \rightarrow \text{Hom}_C(N', T)$  es un isomorfismo para todo  $C$ -módulo  $T$ , lo que en nuestro caso (nuevamente en virtud de los isomorfismos (4.2.3)) equivale a demostrar que el homomorfismo natural  $\text{Der}_A(B/I^2, T) \rightarrow \text{Der}_A(B, T)$  es un isomorfismo para todo  $B/I$ -módulo  $T$ , lo cual se deja como ejercicio al lector.

3) En virtud de 2), podemos reemplazar  $B$  por  $C'$  en la sucesión (4.2.4), así podemos suponer que  $I^2 = 0$ . Si  $\delta$  tiene un inverso izquierdo  $\omega : \Omega_{B/A} \otimes_B C \rightarrow I$ , entonces, haciendo  $D(b) = \omega(d(b) \otimes 1)$  para todo  $b \in B$ , obtenemos una  $A$ -derivación  $D : B \rightarrow I$  tal que  $Dx = x$  para todo  $x \in I$ ; entonces la función  $f : B \rightarrow B$  dada por  $f(b) = b - Db$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos y satisface  $f(I) = 0$ , de modo que induce un homomorfismo  $\bar{f} : C = B/I \rightarrow B$ . Puesto que  $f(b) \equiv b \pmod{I}$ , el homomorfismo  $\bar{f}$  es una sección de la extensión

$$0 \rightarrow I \rightarrow B \rightarrow C/I \rightarrow 0.$$

El recíproco se demuestra invirtiendo los argumentos.  $\diamond$

**Corolario 4.2.4.** *Si  $B$  es una  $A$ -álgebra finitamente generada, o una localización de una  $A$ -álgebra finitamente generada, entonces  $\Omega_{B/A}$  es un  $B$ -módulo finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto,  $B$  es cociente de un anillo de polinomios con coeficientes en  $A$  (o su localización) y lo afirmado se sigue de la proposición 4.2.3, de la proposición 5.1.6 de Diferenciales de Kähler I y del ejemplo de anillo de polinomios.  $\diamond$

### 4.3. Diferenciales de Kähler III

Recuerde que una extensión algebraica  $L/k$  se dice *separable* si para todo elemento  $x \in L$  el polinomio irreducible de  $x$  es separable, es decir, todas sus raíces son simples.

Una extensión, posiblemente trascendente  $K/k$  se dice *separable* si existe una base de trascendencia  $\{x_\alpha\}$  de  $K/k$  tal que  $K$  es una extensión algebraica y separable de  $k(\{x_\alpha\}_\alpha)$ .

**Observación 4.3.1.** *Si  $x$  es trascendente sobre  $\mathbb{k}$ , entonces  $\text{rank}_{\mathbb{k}[x]}(\Omega_{\mathbb{k}[x]/\mathbb{k}}) = 1$ .*

**Lema 4.3.2.** *Si  $x$  es trascendente sobre  $L$ , entonces  $\text{rank}_{L[x]} \Omega_{L[x]/\mathbb{k}} = \text{rank}_L \Omega_{L/\mathbb{k}} + 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Recuerde la primera sucesión exacta:

$$\Omega_{L/\mathbb{k}} \otimes_L L[x] \rightarrow \Omega_{L[x]/\mathbb{k}} \rightarrow \Omega_{L[x]/L} \rightarrow 0,$$

por otra parte, si  $M$  es un  $L[x]$ -módulo arbitrario, toda  $\mathbb{k}$ -derivación de  $L$  en  $M$  se puede extender a una  $\mathbb{k}$ -derivación de  $L[x]$  en  $M$  del siguiente modo: Si  $p(x) = \sum_j a_j x^j \in L[x]$ , entonces

$$D(p(x)) := \sum_j D(a_j) x^j;$$

por tanto la aplicación  $\Omega_{L/\mathbb{k}} \otimes_L L[x] \rightarrow \Omega_{L[x]/\mathbb{k}}$  admite una inversa izquierda y en consecuencia  $\Omega_{L[x]/\mathbb{k}} \cong \Omega_{L/\mathbb{k}} \otimes_L L[x] \oplus L[x]dx$ , de donde lo afirmado.  $\diamond$

**Corolario 4.3.3.** *Para toda extensión de campos  $L/\mathbb{k}$  se cumple que*

$$\text{rank}_{L[x_1, \dots, x_m]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_m]/\mathbb{k}} = \text{rank}_L \Omega_{L/\mathbb{k}} + m.$$

$\diamond$

**Corolario 4.3.4.** *Para toda extensión de campos  $L/\mathbb{k}$  y todo  $x$  trascendente sobre  $L$  se cumple que*

$$\text{rank}_{L(x)} \Omega_{L(x)/\mathbb{k}} = \text{rank}_L \Omega_{L/\mathbb{k}} + 1.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, se sigue de la sucesión exacta (1a. sucesión exacta)

$$\Omega_{L[x]/\mathbb{k}} \otimes_{L[x]} L(x) \rightarrow \Omega_{L(x)/\mathbb{k}} \rightarrow \Omega_{L(x)/L[x]} \rightarrow 0$$

y de que  $\Omega_{L(x)/L[x]} = 0$ , puesto que toda  $\mathbb{k}$ -derivación de  $L[x]$  en un  $L(x)$ -módulo arbitrario  $M$  se puede extender a una  $\mathbb{k}$ -derivación de  $L(x)$  en  $M$  mediante

$$d\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) := \frac{p'(x) \cdot q(x) - q'(x) \cdot p(x)}{q(x)^2} dx$$

$\diamond$

**Lema 4.3.5.** *Si  $\eta$  es algebraico y separable sobre  $L$ , entonces  $\text{rank}_{L(\eta)} \Omega_{L(\eta)/\mathbb{k}} = \text{rank}_L \Omega_{L/\mathbb{k}}$ .*

DEMOSTRACIÓN. De la primera sucesión exacta tenemos un epimorfismo

$$\Omega_{L/\mathbb{k}} \otimes_L L(\eta) \xrightarrow{\varphi} \Omega_{L(\eta)/\mathbb{k}} \longrightarrow 0$$

puesto que  $\Omega_{L(\eta)/L} = 0$  en este caso (vease Diferenciales de Kähler I). Por tanto  $\varphi$  será un isomorfismo si y sólo si para todo  $L(\eta)$ -módulo  $M$ , toda  $\mathbb{k}$  derivación de  $L$  en  $M$  se puede extender de manera única a una  $\mathbb{k}$ -derivación de  $L(\eta)$  en  $M$ .

I) Observe que todo elemento  $\alpha \in L(\eta)$  se puede escribir de manera única como

$$\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} b_j \eta^j = g(\eta) \text{ para algún polinomio } g \text{ de grado } \leq m-1 \text{ con coeficientes en } L.$$

II) Veamos primero la unicidad de la extensión, en caso de que exista:

En efecto, supongamos que  $M$  es un  $L(\eta)$ -módulo y que  $D : L \rightarrow M$  es una  $\mathbb{k}$ -derivación de  $L$  en  $M$  que admite una extensión a una  $\mathbb{k}$ -derivación  $\bar{D} : L(\eta) \rightarrow M$ ; entonces necesariamente tendremos

$$\bar{D}(\alpha) = \bar{D}(g(\eta)) = \bar{D}\left(\sum_{i=0}^{m-1} b_i \eta^i\right) = \sum_{i=0}^{m-1} (D(b_i) \eta^i + i \cdot b_i \eta^{i-1} \bar{D}(\eta)) = g^D(\eta) + g'(\eta) \bar{D}(\eta),$$

donde como antes,  $g^D$  es el polinomio que se obtiene de  $g$  aplicando  $D$  a sus coeficientes, de modo que  $\bar{D}(\eta)$  determina a  $\bar{D}(\alpha)$  para todo  $\alpha \in L(\eta)$ .

Si  $f(x) = x^m + \sum_i a_i x^i$  es el polinomio irreducible de  $\eta$  sobre  $L$  tendremos  $f(\eta) = 0$  y por tanto

$$0 = D(0) = \bar{D}(f(\eta)) = f'(\eta) \bar{D}(\eta) + f^D(\eta),$$

Como  $\eta$  es separable sobre  $L$  entonces  $f'(\eta) \neq 0 \in L$  por lo que es una unidad, de donde deducimos que  $\bar{D}(\eta) = -\frac{f^D(\eta)}{f'(\eta)}$  lo que demuestra la unicidad de  $\bar{D}$ .

III) Se deja al lector verificar que la asignación  $\bar{D}(\eta) = -\frac{f^D(\eta)}{f'(\eta)}$  efectivamente define una extensión de  $D$  a una  $\mathbb{k}$ -derivación  $\bar{D}$  de  $L(\eta)$  en  $M$ .  $\diamond$

**Lema 4.3.6.** *Si  $L$  es un campo de característica  $p > 0$  y el polinomio irreducible de  $\eta$  sobre  $L$  es  $x^p - a$  para algún  $a \in L$  tal que  $d_{L/\mathbb{k}}(a) = 0$ , entonces*

$$\text{rank } \Omega_{L(\eta)/\mathbb{k}} = \text{rank } \Omega_{L/\mathbb{k}} + 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Por construcción tenemos  $L(\eta) \cong L[x]/(x^p - a)$  y la segunda sucesión exacta se lee como

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{L[x]/\mathbb{k}} \otimes_{L[x]} L(\eta) \cong (\Omega_{L/\mathbb{k}} \otimes_L L(\eta)) \oplus L(\eta) dx \longrightarrow \Omega_{L(\eta)/\mathbb{k}} \longrightarrow 0,$$

donde  $I = (x^p - a)$ ,  $\delta(P(x)) = (dP)(x) + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx$  y  $dP = P^{d_{L/\mathbb{k}}} \pmod I$ .

Pero por hipótesis  $d_{L/\mathbb{k}}(a) = 0$  y  $\frac{\partial x^p - a}{\partial x} = 0$ , por tanto  $\delta(x^p - a) = 0$  por lo que

$$\Omega_{L(\eta)/\mathbb{k}} \cong (\Omega_{L/\mathbb{k}} \otimes_L L(\eta)) \oplus L(\eta)dx,$$

de donde  $\text{rank } \Omega_{L(\eta)/\mathbb{k}} = \text{rank } \Omega_{L/\mathbb{k}} + 1$ .  $\diamond$

**Corolario 4.3.7.** *Si  $L$  es un campo de característica  $p > 0$  y el polinomio irreducible de  $\eta$  sobre  $L$  es  $x^p - a$  para algún  $a \in L$  tal que  $d_{L/\mathbb{k}}(a) \neq 0$ , entonces*

$$\text{rank } \Omega_{L(\eta)/\mathbb{k}} = \text{rank } \Omega_{L/\mathbb{k}}.$$

DEMOSTRACIÓN. La misma que la del lema 4.3.6, *mutatis mutandis* y observando que  $\delta(x^p - a) \neq 0$  en este caso.  $\diamond$

**Teorema 4.3.8.** *Sean  $\mathbb{k}$  un campo,  $L$  una extensión de  $\mathbb{k}$  y  $K$  una extensión finitamente generada de  $L$ ; entonces*

1)

$$(4.3.1) \quad \text{rank}_K \Omega_{K/\mathbb{k}} \geq \text{rank}_L \Omega_{L/\mathbb{k}} + \text{GradTrans}_L K.$$

2) *Si  $K/L$  es separable (no necesariamente algebraica), entonces se tiene la igualdad en (4.3.1).*

3) *Si  $K/\mathbb{k}$  es una extensión finitamente generada, entonces  $\text{rank}_K \Omega_{K/\mathbb{k}} \geq \text{GradTrans}_{\mathbb{k}} K$ , con igualdad si y sólo si la extensión es separable; en particular  $\Omega_{K/\mathbb{k}} = 0$  si y sólo si  $K/\mathbb{k}$  es una extensión algebraica y separable.*

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata de los lemas y corolarios precedentes, puesto que toda extensión de campos finitamente generada se obtiene como una extensión algebraica finita de una extensión trascendente finitamente generada. Para el inciso 3), observe que si ocurre la igualdad entonces ninguna extensión intermedia puede ser una extensión inseparable pura asociada a un ideal de la forma  $(x^p - a)$ .  $\diamond$

**Proposición 4.3.9.** *Si  $(B, \mathfrak{M})$  es un anillo local que contiene a un campo  $\mathbb{k}$  isomorfo a su campo residual  $B/\mathfrak{M}$ , entonces  $\delta : \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \rightarrow \Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B \mathbb{k}$  es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, en estas circunstancias la segunda sucesión exacta se lee como

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B \mathbb{k} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{k}/\mathbb{k}} \longrightarrow 0,$$



pero claramente  $\Omega_{\mathbb{k}/\mathbb{k}} = 0$ , de modo que  $\delta$  es suprayectivo. Para demostrar que es un isomorfismo es suficiente demostrar que también es inyectivo o, equivalentemente, que el morfismo dual

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B \mathbb{k}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\delta^\vee} \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2, \mathbb{k})$$

es suprayectivo; pero  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B \mathbb{k}, \mathbb{k}) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/\mathbb{k}}, \mathbb{k}) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(B, \mathbb{k})$ . Si  $d : B \rightarrow \mathbb{k}$  es una  $\mathbb{k}$ -derivación, entonces  $\delta^\vee(d) = d|_{\mathfrak{M}}$  (observe que  $d(\mathfrak{M}^2) = 0$ ). Veamos que  $\delta^\vee$  es suprayectivo. Dados  $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2, \mathbb{k})$  y  $b \in B$ , existen  $a \in \mathbb{k} \cong B/\mathfrak{M}$  y  $m \in \mathfrak{M}$  únicos tales que  $b = a + m$ . Definamos  $d(b) := h(\bar{m})$ , donde  $\bar{m} \in \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$  es la clase de  $m$ ; entonces  $d$  es una  $\mathbb{k}$ -derivación de  $B$  en  $\mathbb{k}$  (ejercicio) y  $\delta^\vee(d) = d|_{\mathfrak{M}} = h$ , de modo que  $\delta^\vee$  es suprayectivo.  $\diamond$

**Lema 4.3.10.** *Para todo dominio entero local noetheriano  $B$  con campo residual  $\mathbb{k}$  y campo de cocientes  $K$  y para todo  $B$ -módulo finitamente generado  $M$ , si  $\dim_{\mathbb{k}} M \otimes_B \mathbb{k} = \dim_K M \otimes_B K = r$ , entonces  $M$  es un  $B$ -módulo libre de rango  $r$ .*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $\dim_{\mathbb{k}} M \otimes_B \mathbb{k} = r$ , el lema de Nakayama nos asegura que  $M$  admite  $r$  generadores, de modo que existe un epimorfismo  $\varphi : B^r \rightarrow M \rightarrow 0$ . Si  $L := \mathrm{Ker} \varphi$  entonces tenemos una sucesión exacta  $0 \rightarrow L \rightarrow B^r \rightarrow M \rightarrow 0$  y como  $K$  es  $B$ -plano por ser una localización, la sucesión

$$0 \longrightarrow L \otimes_B K \longrightarrow K^r \longrightarrow M \otimes_B K \longrightarrow 0$$

es exacta. Como por hipótesis  $\dim_K M \otimes_B K = r$ , entonces debemos tener  $L \otimes_B K = 0$ , pero  $L$  es libre de torsión (por ser un submódulo de un módulo libre y dado que  $B$  es un dominio), así que  $L = 0$  y por tanto  $M \cong B^r$ .  $\diamond$

**Teorema 4.3.11.** *Supongamos que  $(B, \mathfrak{M})$  es un anillo local que contiene un campo  $\mathbb{k}$  isomorfo a su campo residual  $B/\mathfrak{M}$  y supongamos además que  $\mathbb{k}$  es un campo perfecto y que  $B$  es una localización de una  $\mathbb{k}$ -álgebra finitamente generada; entonces  $\Omega_{B/\mathbb{k}}$  es un  $B$ -módulo libre de rango  $\mathrm{rank}_B \Omega_{B/\mathbb{k}} = \dim B$  si y sólo si  $B$  es un anillo local regular.*

DEMOSTRACIÓN. I) Supongamos que  $\Omega_{B/\mathbb{k}}$  es un  $B$ -módulo libre de rango  $\mathrm{rank}_B \Omega_{B/\mathbb{k}} = \dim B$ , por la proposición precedente  $\delta : \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \rightarrow \Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B \mathbb{k}$  es un isomorfismo y por tanto  $\mathrm{rank} \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 = \dim B$ , luego  $B$  es un anillo local regular (en articular es un dominio entero).

II) Si  $B$  es un anillo local regular de dimensión  $r$ , entonces  $\mathrm{rank} \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 = r$  y por la proposición precedente, puesto que  $\delta : \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \rightarrow \Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B \mathbb{k}$  es un isomorfismo, entonces  $\dim_{\mathbb{k}} \Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B \mathbb{k} = r$ . Por otra parte si  $K$  es el campo de cocientes de  $B$  entonces  $\Omega_{B/\mathbb{k}} \otimes_B K \cong \Omega_{K/\mathbb{k}}$  por la proposición 5.1.6 (Diferenciales de Kähler I). Como  $\mathbb{k}$  es perfecto la extensión  $K/\mathbb{k}$  es necesariamente separable y por el teorema 4.3.8, inciso 2) se tiene  $\dim_K \Omega_{K/\mathbb{k}} = \mathrm{GradTrans} K/\mathbb{k} = \dim B = r$  y por el corolario 6.1.4 (Diferenciales de Kähler II),  $\Omega_{B/\mathbb{k}}$  es un  $B$ -módulo finitamente generado. Finalmente por el

lema 4.3.10,  $\Omega_{B/\mathbb{k}}$  es de hecho un  $B$ -módulo libre de rango  $r$ . ◇

**Observación 4.3.12.** Si  $X = \text{Spec } B$  e  $Y = \text{Spec } A$ , a todo morfismo de esquemas  $\varphi : X \rightarrow Y$  le corresponde un homomorfismo de anillos  $f : A \rightarrow B$  y por tanto una estructura de  $A$ -álgebra en  $B$ , de modo que a  $\varphi$  le asociamos el  $B$ -módulo de diferenciales relativas  $\Omega_{B/A}$ . A este módulo se le puede asociar una gavilla casi-coherente  $\Omega_{X/Y} := \tilde{\Omega}_{B/A}$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos que, como se hizo notar en la sección de esquemas, queda totalmente definida por su valor en los abiertos básicos de la forma  $D(g) \cong \text{Spec } B_g$  y, por la proposición 5.1.6 de Diferenciales de Kähler I y lo observado la sección de esquemas,

$$\Omega_{X/Y}(D(g)) = \tilde{\Omega}_{B/A}(D(g)) \cong (\Omega_{B/A})_g \cong \Omega_{B_g/A}.$$

# Capítulo 5

## Morfismos Lisos

Comenzaremos por generalizar la noción de *módulo de diferenciales relativas* al contexto de morfismos entre esquemas. Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas, podemos construir el esquema  $X \times_Y X$  y considerar el morfismo diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  (observe que  $X \times_Y X$  y por tanto  $\Delta$  dependen de  $\varphi$ ). La imagen de  $\Delta$  es isomorfa a  $X$  y es un subesquema localmente cerrado en  $X \times_Y X$ , es decir un subesquema cerrado de un subesquema abierto  $W \subset X \times_Y X$ .

**Definición.** Sea  $\mathfrak{I}$  la gavilla de ideales de  $\Delta(X)$  en  $W$ , entonces definimos la *gavilla de diferenciales relativas* de  $X$  sobre  $Y$  como la gavilla  $\Omega_{X/Y} := \Delta^*(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)$ , que es por definición una gavilla en  $X$ .

**Observación 5.0.1.** Observe que  $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$  tiene una estructura natural de  $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$ -módulo, de modo que, puesto que  $\Delta(X)$  es isomorfo a  $X$ ,  $\Omega_{X/Y}$  tiene una estructura natural de  $\mathcal{O}_X$ -módulo. Como la gavilla de ideales  $\mathfrak{I}$  es casi-coherente, entonces la gavilla de diferenciales relativas es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo casi-coherente; más aún, si  $X \times_Y X$  es noetheriano,  $\mathfrak{I}$  es coherente y por tanto  $\Omega_{X/Y}$  será una gavilla coherente en este caso.

**Definición.** Un morfismo entre esquemas  $f : X \rightarrow Y$  se dice de *tipo finito* si  $Y$  admite una cubierta afín  $\{U_\alpha\}$ ,  $U_\alpha \cong \text{Spec } A_\alpha$  tal que  $f^{-1}(U_\alpha)$  se puede cubrir por un número finito de abiertos afines  $V_{\alpha,j} \cong \text{Spec } B_{\alpha,j}$  donde los  $B_{\alpha,j}$  son  $A_\alpha$ -álgebras finitamente generadas. Si la cubierta  $V_{\alpha,j}$  no puede garantizarse finita, diremos que el morfismo es *localmente de tipo finito*. En este capítulo sólo consideraremos morfismos de tipo finito. Un  $\mathbb{k}$ -esquema se dice de *tipo finito* (respectivamente *localmente de tipo finito*) si el morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{k}$  es de tipo finito (respectivamente si es localmente de tipo finito).

**Observaciones 5.0.2.** 1) Si  $f : X \rightarrow Y$  es de tipo finito e  $Y$  es noetheriano, entonces  $X \times_Y X$  es noetheriano y en este caso la gavilla de diferenciales relativas  $\Omega_{X/Y}$  es una gavilla coherente.

2) Si  $Y = \text{Spec } A$ ,  $X = \text{Spec } B$  y  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas afines, entonces  $X \times_Y X \cong \text{Spec } B \otimes_A B$  y el subesquema cerrado  $\Delta(X)$  es el cerrado definido por el ideal  $J = \text{Ker}(B \otimes_A B \rightarrow B)$ , donde  $B \otimes_A B$  es el morfismo  $b \otimes b' \mapsto bb'$ , por tanto  $\Omega_{X/Y} \cong \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 = \widetilde{J/J^2} \cong \widetilde{\Omega}_{B/A}$ .

Por tanto los resultados que tenemos para los módulos de diferenciales relativas se pueden trasladar a sus correspondientes versiones para las gavillas de diferenciales relativas.

**Proposición 5.0.3.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y' \rightarrow Y$  son dos morfismos de esquemas y  $\pi_2 : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  es la proyección canónica en  $Y'$ , entonces*

$$\Omega_{X \times_Y Y'/Y'} \cong \pi_1^*(\Omega_{X/Y}),$$

donde  $\pi_1 : X \times_Y Y' \rightarrow X$  es la proyección canónica en  $X$ . ◇

**Proposición 5.0.4.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son dos morfismos de esquemas, entonces existe una sucesión exacta*

$$f^*\Omega_{Y/Z} \rightarrow \Omega_{X/Z} \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la primera sucesión exacta para los módulos de diferenciales relativas. ◇

**Proposición 5.0.5.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas y  $Z \subset X$  es un subesquema cerrado con gavilla de ideales  $\mathfrak{J}$ , entonces existe una sucesión exacta*

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \rightarrow \Omega_{Z/Y} \rightarrow 0$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la segunda sucesión exacta para módulos de diferenciales relativas.

**Ejemplo 5.0.6.** *Si  $X = \mathbb{A}_Y^n$ , entonces  $\Omega_{X/Y}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo libre generado por las secciones globales  $dx_1, \dots, dx_n$ , donde  $x_1, \dots, x_n$  son coordenadas afines de  $\mathbb{A}^n$ .*

**Teorema 5.0.7.** *(Sucesión de Euler) Dado un anillo  $A$  (conmutativo con 1), si  $Y = \text{Spec } A$  y  $X = \mathbb{P}_A^n$  es el espacio proyectivo sobre  $A$ , entonces tenemos una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

donde  $\mathcal{O}_X(-1)^{n+1}$  significa una suma directa de  $n + 1$  copias de  $\mathcal{O}_X(-1)$ .

DEMOSTRACIÓN. Hartshorne.

**Lema 5.0.8.** *Toda localización de un anillo local regular en un ideal primo  $\mathfrak{p}$  es nuevamente un anillo local regular.*

DEMOSTRACIÓN. Matsumura.

**Teorema 5.0.9.** *Sea  $X$  un esquema separado, irreducible y de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado  $\mathbb{k}$ , entonces  $\Omega_{X/\text{Spec } \mathbb{k}}$  es una gavilla localmente libre de rango  $n = \dim X$  si y sólo si  $X$  es una variedad no singular sobre  $\mathbb{k}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $x \in X$  es un punto cerrado, entonces el anillo local  $B = \mathcal{O}_{x,X}$  es un anillo local regular de dimensión  $n$  y con campo de residuos  $\mathbb{k}$ , además es claramente una localización de una  $\mathbb{k}$ -álgebra de tipo finito, más aún, el tallo  $(\Omega_{X/\mathrm{Spec} \mathbb{k}})_x$  es isomorfo al módulo de diferenciales relativas  $\Omega_{B/\mathbb{k}}$ , como se infiere de la observación 8.1.2, inciso 2) y, por 7.1.11 (Diferenciales de Kähler III), este es un módulo libre de rango  $n$  si y sólo si  $B$  es un anillo local regular de dimensión  $n$ . Para los puntos genéricos el resultado se sigue del lema precedente.  $\diamond$

**Corolario 5.0.10.** *Si  $X$  es un esquema de tipo finito, irreducible, separado y no singular sobre  $\mathbb{k}$  e  $Y \subset X$  es una subvariedad cerrada definida por la gavilla de ideales  $\mathfrak{J}$ , entonces  $Y$  es no singular si y sólo si*

- 1)  $\Omega_{Y/\mathrm{Spec} \mathbb{k}}$  es localmente libre y
- 2) La sucesión exacta inducida por la segunda sucesión exacta es exacta por la izquierda, es decir, si y sólo si:

$$0 \rightarrow \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \rightarrow \Omega_{Z/Y} \rightarrow 0$$

es exacta. Más aún, en este caso  $\mathfrak{J}$  es localmente generado por  $r = \mathrm{codim}_X Y$  elementos y  $J/J^2$  es una gavilla localmente libre de rango  $r$  en  $Y$ .

DEMOSTRACIÓN. Dado que  $Y \subset X$  es un esquema separado, irreducible y de tipo finito,  $Y$  es no singular si y sólo si  $\Omega_{Y/\mathrm{Spec} \mathbb{k}}$  es localmente libre de rango igual a la dimensión de  $Y$  por el teorema 5.0.9, de modo que todo se reduce a demostrar que la exactitud de la sucesión corta 2) es equivalente a que  $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$  es localmente libre de rango  $n - \dim Y = \mathrm{codim} Y$ .  $\diamond$

**Definición.** Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre esquemas de tipo finito sobre  $\mathrm{Spec} \mathbb{k}$  se dice *liso de dimensión relativa  $n$*  si:

- 1)  $f$  es plano,
- 2) dadas sendas componentes irreducibles  $X'$  de  $X$  e  $Y'$  de  $Y$  tales que  $f(X') \subset Y'$ , entonces  $\dim X' = \dim Y' + n$  y
- 3) para todo  $x \in X$ , cerrado o no,  $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y})_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) = n$ .

**Ejemplo 5.0.11.** *Si  $\mathbb{k}$  es un campo **perfecto**, entonces para cualquier  $\mathbb{k}$ -esquema  $X$ , el morfismo estructural  $X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{k}$  es liso si y sólo si  $X$  es regular y equidimensional. En particular, si  $X$  es irreducible y separado sobre  $\mathbb{k}$ , el morfismo estructural es liso si y sólo si  $X$  es una variedad no singular.*

**Ejemplo 5.0.12.** *Para todo  $\mathbb{k}$ -esquema de tipo finito  $Y$ , los morfismos canónicos  $\mathbb{A}_Y^n \rightarrow Y$  y  $\mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$  son morfismos lisos de dimensión relativa  $n$ .*

**Ejemplo 5.0.13.** *Si  $X$  es reducido e irreducible (i.e. un esquema entero), la condición 3) de la definición de morfismo liso es equivalente a que la gavilla  $\Omega_{X/Y}$  sea una gavilla de  $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libre de rango  $n$ .*

**Proposición 5.0.14.** 1. Toda inmersión abierta es un morfismo liso de dimensión relativa 0.

2. (Cambio de base) Los morfismos lisos son estables bajo cambio de base, es decir, si  $f : X \rightarrow Y$  es liso de dimensión relativa  $n$  y  $Z \rightarrow Y$  es un morfismo, entonces el morfismo canónico  $f' : Z \times_Y X \rightarrow Z$  es liso de dimensión relativa  $n$ .

3. Si  $f : X \rightarrow Y$  es liso de dimensión relativa  $n$  y  $g : Y \rightarrow Z$  es liso de dimensión relativa  $m$ , entonces  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es liso de dimensión relativa  $n + m$ .

4. (Producto) Si  $f : X \rightarrow Z$  es liso de dimensión relativa  $n$  y  $g : Y \rightarrow Z$  es liso de dimensión relativa  $m$ , entonces  $f \times g : X \times_Z Y \rightarrow Z$  es liso de dimensión relativa  $n + m$ .

DEMOSTRACIÓN. 1) es evidente.

2)  $f'$  es plano porque planitud se preserva bajo cambio de base; por otra parte, la condición 2) en la definición de morfismo liso de dimensión relativa  $n$  es equivalente a que cada componente irreducible de cada fibra sea de dimensión  $n$ , pero  $(Z \times_Y X)_z \cong X_y$  si  $y \in Y$  es la imagen de  $z \in Z$ , de modo que en particular se preserva la dimensión de las componentes irreducibles de las fibras. Finalmente la gavilla de diferenciales relativas se preserva bajo cambio de base (proposición 5.0.3) y por tanto la correspondiente dimensión.

3) Composición de morfismos planos es plano. Si  $X', Y'$  y  $Z'$  son sendas componentes de  $X, Y$  y  $Z$  tales que  $f(X') \subset Y'$  y  $g(Y') \subset Z'$ , entonces  $\dim X' = \dim Y' + n = (\dim Z' + m) + n$  por hipótesis. Finalmente la última afirmación es consecuencia de la primera sucesión exacta para módulos de diferenciales relativas y del hecho de que el rango del módulo de diferenciales relativas está acotado inferiormente por el grado de trascendencia del campo de cocientes  $K(X)$  sobre el campo  $K(Z)$ , que es  $n + m$  por la condición 2).

4) Es consecuencia de 2) y 3) pues tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ & \searrow f \times g & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

◇

**Ejemplo 5.0.15.** En virtud de la proposición anterior, si  $U \subset \mathbb{P}_Y^n \times \mathbb{P}_Y^m$  es un abierto no vacío e  $Y$  es un  $\mathbb{k}$ -esquema de tipo finito, entonces la proyección natural  $U \rightarrow Y$  es un morfismo liso de dimensión relativa  $n + m$

**Teorema 5.0.16.** *Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo entre esquemas de tipo finito sobre  $\mathbb{k}$ ; entonces  $f$  es liso de dimensión relativa  $n$  si y sólo si*

1.  $f$  es plano y

2. para todo punto  $y \in Y$ , la fibra geométrica  $X_{\bar{y}} := X_y \times_{\text{Spec } k(y)} \text{Spec } \overline{k(y)}$  es regular y equidimensional de dimensión  $n$ .

DEMOSTRACIÓN.  $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es liso de dimensión relativa  $n$ , por la estabilidad bajo cambio de base también lo es la proyección canónica  $\pi$

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar{y}} = X \times_Y \text{Spec } \overline{k(y)} & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec } \overline{k(y)} \\ \downarrow & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

por tanto  $X_{\bar{y}}$  es regular y equidimensional de dimensión  $n$ .

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente, si  $f$  es plano y la fibra geométrica  $X_{\bar{y}}$  es regular y equidimensional de dimensión  $n$ , en particular  $X_y$  es equidimensional de dimensión  $n$  (que es la condición (2) en la definición de morfismo liso de dimensión relativa  $n$ ), en tanto que la regularidad del  $\overline{k(y)}$ -esquema  $X_{\bar{y}}$  implica inmediatamente que  $\Omega_{X_{\bar{y}}/\text{Spec } \overline{k(y)}}$  es localmente libre de rango  $n$  (ver ejemplo 5.0.11) y por tanto  $\Omega_{X_y/\text{Spec } k(y)}$  también es localmente libre de rango  $n$ , de modo que para todo  $x \in X_y$  se tiene que

$$\dim_{k(x)} \left( (\Omega_{X/Y})_x \otimes k(x) \right) = \dim_{k(x)} \left( (\Omega_{X_y/\text{Spec } k(y)})_x \otimes k(x) \right) = n$$

◇

**Observación 5.0.17.** *El teorema precedente nos permite entender, de manera geométrica, por qué los morfismos lisos son estables bajo cambio de base, puesto que las fibras se preservan bajo cambio de base.*

**Ejemplo 5.0.18.** *Sea  $X$  una variedad definida sobre el campo  $\mathbb{k}$  y sea  $\mathbb{E}$  una gavilla localmente libre de rango  $n+1$ ; entonces el morfismo natural de  $f : \mathbb{P}(\mathbb{E}) \rightarrow X$  es liso de dimensión relativa  $n = \text{rango } \mathbb{E} - 1$ .*

**Ejemplo 5.0.19.** *Supongamos que  $F$  y  $G$  son dos ecuaciones homogéneas de grado  $n$  en  $\mathbb{k}[x_0, \dots, x_m]$  que definen variedades proyectivas lisas, entonces la ecuación  $uF - vG$  define una hipersuperficie  $H \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^1$ . La proyección  $\pi : H \rightarrow \mathbb{P}^1$  es un morfismo plano y, si nos restringimos al abierto  $U \subset \mathbb{P}^1$  para el cual las fibras  $\pi^{-1}([u : v])$  son no singulares, entonces el morfismo resultante  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$  es un morfismo liso de dimensión relativa  $m-1$ ; v.g. la familia de curvas elípticas  $u(x^3 + y^3) - v(x^2y)$  define un morfismo liso de dimensión relativa 1 sobre el abierto de  $\mathbb{P}^1$  donde las correspondientes curvas cúbicas son no singulares.*

**Ejemplo 5.0.20.** Sean  $X$  una curva no singular definida sobre un campo  $K$  y  $R$  algún anillo de valuación discreta con campo de cocientes igual a  $K$ . El modelo  $\mathcal{X}$  de la curva  $X$  sobre  $R$  es una variedad regular de dimensión 2, pero el morfismo estructural de  $\mathcal{X}$  en  $\text{Spec } R$  no necesariamente es liso, eso depende de que la fibra  $X_{\mathfrak{p}}$  en el punto cerrado sea o no regular, v.g.  $\mathcal{X} = \text{Spec } \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}[x, y]/(y^2 - x(x - 1)(x - \mathfrak{p}))$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longleftarrow & X_{\mathfrak{p}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Spec } \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}} & \longleftarrow & \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}
 \end{array}$$



# Capítulo 6

## Morfismos Étale

**Definición.** Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades se dice *étale* (desplegado), si  $f$  es liso de dimensión relativa cero.

**Ejemplo 6.0.1.** Si  $L/K$  es una extensión algebraica y separable, entonces  $\Omega_{L/K} = 0$  y por tanto  $\Omega_{\text{Spec } L/\text{Spec } K} = \tilde{\Omega}_{L/K} = 0$ . Como ostensiblemente  $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } K$  es plano y las correspondientes componentes irreducibles tienen la misma dimensión, entonces el morfismo  $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } K$  es un morfismo étale.

**Definición.** Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  se dice *no ramificado* si para todo  $x \in X$  se cumple  $\mathfrak{M}_{f(x)}\mathcal{O}_x = \mathfrak{M}_x$  y  $k(x)/k(f(x))$  es una extensión algebraica separable.

**Ejemplo 6.0.2.** Nuevamente, si  $L/K$  es una extensión algebraica y separable, el morfismo  $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } K$  es claramente no ramificado (la condición en los ideales máximos se cumple trivialmente).

**Lema 6.0.3.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de  $\mathbb{k}$ -esquemas de tipo finito; entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- a)  $f$  es étale.
- b)  $f$  es plano y  $\Omega_{X/Y} = 0$ .
- c)  $f$  es plano y no ramificado.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que a)  $\iff$  b) y b)  $\iff$  c).

a)  $\implies$  b) es obvio de la definición de étale.

b)  $\Leftarrow$  a) Es suficiente demostrar que si  $X'$  e  $Y'$  son sendas componentes irreducibles de  $X$  e  $Y$  tales que  $f(X') \subset Y'$ , entonces  $\dim X' = \dim Y'$ , pues las condiciones 1) y 3) de la definición de morfismo liso de dimensión relativa cero se satisfacen de manera evidente. Pero en este caso, podemos suponer sin pérdida de generalidad que tanto  $X$  como  $Y$  son irreducibles y de hecho afines, pues la dimensión de todo abierto no vacío en un esquema irreducible coincide con la de su cerradura, es decir, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $X = \text{Spec } B$ ,  $Y = \text{Spec } A$  son irreducibles y  $\Omega_{X/Y} = \tilde{\Omega}_{B/A} = 0$ , es decir,  $\Omega_{B/A} = 0$ .

Si  $X$  e  $Y$  son esquemas enteros (reducidos e irreducibles), entonces  $A$  y  $B$  son dominios enteros. Sean  $K$  y  $L$  sus respectivos campos de cocientes, entonces por localización  $\Omega_{L/K} = 0$  puesto que  $\Omega_{B/A} = 0$ ; pero entonces  $L/K$  es una extensión algebraica y separable por 7.1.8 inciso 3) (Diferenciales de Kähler III), esto implica que  $B$  es entero sobre  $A$ , es decir, todo elemento de  $b \in B$  está contenido en un  $A$ -submódulo finitamente generado (de hecho generado por  $b$  y sus potencias, módulo el polinomio irreducible de  $b$  en  $A$ ) y por tanto  $\dim X = \dim B = \dim A = \dim Y$ , donde las dimensiones de los anillos son las dimensiones de Krull. Pero este argumento también demuestra el caso general, puesto que para todo esquema  $Z$  se cumple que  $\dim Z = \dim Z_{red}$  y la propiedad universal de  $Z_{red}$  implica que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{red} & \dashrightarrow & Y_{red} \end{array}$$

Se deja al lector verificar que  $\Omega_{X/Y} = 0$  implica  $\Omega_{X_{red}/Y_{red}} = 0$ .

b)  $\Rightarrow$  c). Esta es una condición local, por lo que podemos suponer

$$X = \text{Spec } A \xrightarrow{f} Y = \text{Spec } B$$

$$x = \mathfrak{p} \longmapsto f(x) = \mathfrak{q}$$

esto induce homomorfismos  $f^\# : B \rightarrow A$  y  $f_{\mathfrak{p}}^\# : B_{\mathfrak{q}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$  con  $f_{\mathfrak{p}}^\#(\frac{a}{b}) = \frac{f^\#(a)}{f^\#(b)}$ . Como  $f$  es plano, entonces  $A_{\mathfrak{p}}$  es  $B_{\mathfrak{q}}$  plano, por tanto, la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} = k(f(x)) \rightarrow 0$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & k(f(x)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f_{\mathfrak{p}}^\# & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} \otimes k(f(x)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

con renglones exactos, donde  $\alpha$  es inyectiva ó idénticamente cero; como este último no es el caso ( $\alpha(1) = 1$ ), entonces  $\alpha$  es inyectiva. Por otro lado,  $A_{\mathfrak{p}} \otimes k(f(x))$  es un dominio entero que es algebraico sobre  $k(x)$ , pues  $\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim A = \dim B = \dim B_{\mathfrak{q}}$  y  $f$  es étale, entonces  $A_{\mathfrak{p}} \otimes k(f(x))$  es un campo, que es una extensión algebraica (forzosamente separable -ver 7.1.8, Diferenciales de Kähler III).

Pero si  $A_{\mathfrak{p}} \otimes k(f(x))$  es un campo, entonces  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$  es un ideal máximo. Como  $A_{\mathfrak{p}}$  es local, entonces  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$  es el ideal máximo de  $A_{\mathfrak{p}}$  y además  $A_{\mathfrak{p}} \otimes k(f(x)) = k(x)$ , es decir,  $f$  es no ramificado.

a)  $\Leftarrow$  c). Demostremos el recíproco. Por hipótesis  $f$  es plano. La segunda condición para morfismos lisos es una condición sobre las componentes irreducibles de  $X$  e

$Y$ , por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que ambos son esquemas irreducibles.

En estas circunstancias, si  $y \in Y$  y  $x \in f^{-1}(y)$  es el punto genérico de la fibra en  $y$ , entonces c) implica que  $k(X_y) = k(x)/k(y)$  es algebraica y separable, por tanto la dimensión de la fibra es cero. Por otro lado, si  $\eta$  es el punto genérico de  $X$  y  $\zeta = f(\eta)$ , el razonamiento anterior nos dice que  $K(X) = K(\eta)/K(\zeta)$  es algebraico, es decir  $\dim X = \dim \overline{\{\zeta\}} \leq \dim Y$ , pero  $f$  es plano, por tanto es dominante y también se tiene  $\dim X \geq \dim Y$ , ergo  $\dim X = \dim Y$ .

Por tanto sólo necesitamos verificar que  $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y})_x \otimes k(x) = 0$  para todo  $x \in X$ . Observemos que, por hipótesis,  $\mathfrak{M}_{f(x)}\mathcal{O}_x = \mathfrak{M}_x$ , por tanto se tiene un morfismo inyectivo  $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 \rightarrow \mathfrak{M}_{f(x)}/\mathfrak{M}_{f(x)}^2$ , lo cual induce un morfismo suprayectivo

$$(6.0.1) \quad f^*\Omega_{Y/\text{Spec } k(f(x))} \otimes k(f(x)) \rightarrow \Omega_{X/\text{Spec } k(x)} \otimes k(x) \rightarrow 0;$$

pero la primera sucesión exacta para la gavilla de diferenciales relativas induce una sucesión exacta

$$f^*\Omega_{Y/\text{Spec } k} \rightarrow \Omega_{X/\text{Spec } k} \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0,$$

la cual, localizando en  $x$  y tomando producto tensorial por  $k(x)$  induce la sucesión exacta

$$f^*\Omega_{Y/\text{Spec } k} \otimes k(x) \rightarrow \Omega_{X/\text{Spec } k} \otimes k(x) \rightarrow \Omega_{X/Y} \otimes k(x) \rightarrow 0,$$

así, de la suprayectividad en la ecuación (6.0.1) se concluye que  $\Omega_{X/Y} \otimes k(x) = 0$  para todo  $x \in X$ .  $\diamond$

**Ejemplo 6.0.4.** *La inclusión  $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p[\epsilon]/(\epsilon^2)$  induce un morfismo natural*

$$f : \text{Spec } \mathbb{Z}_p[\epsilon]/(\epsilon^2) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_p$$

*el cual no es étale, pues es ramificado en cero. Observe que en este ejemplo ambos campos residuales son simplemente  $\mathbb{F}_p$ .*

**Ejemplo 6.0.5.** *Sea  $C$  una curva proyectiva lisa con campo de funciones racionales  $K = K(C)$  y sea  $L$  una extensión finita no ramificada de  $K$ , sea  $Y$  la única curva proyectiva lisa cuyo campo de funciones racionales es  $L$ , entonces el morfismo natural de  $Y$  en  $C$  es un morfismo étale.*

**Ejemplo 6.0.6.** *Si en el ejemplo anterior sustituimos la curva  $C$  por una superficie  $S$  la conclusión ya no es verdadera, pues dos superficies brracionalmente equivalentes tienen el mismo campo de funciones, en particular, si sustituimos la superficie  $Y$  por una dilatación de la misma a lo largo de un punto, el campo de funciones racionales no cambia, pero el morfismo  $Y \rightarrow S$  no resulta ni siquiera discreto, pues la fibra excepcional tiene por imagen un único punto en  $S$ .*

A continuación se presentan algunos ejemplos de morfismos que **no** son étale, pues son planos pero ramificados ó bien son no ramificados pero no planos.

**Ejemplo 6.0.7.** Sea  $f : \text{Spec } k[u] \rightarrow \text{Spec } k[T]$  el morfismo inducido por el homomorfismo  $u \rightarrow T^2$ , entonces  $f$  es un morfismo plano, pero no es étale pues es ramificado en  $u = 0$ .

**Ejemplo 6.0.8.** Sea  $X$  un esquema sobre un campo  $k$  de característica  $p > 0$  y sea  $X^{(p)} := X \times_F \text{Spec } k$ , donde  $F_k : k \rightarrow k$  es el morfismo de Frobenius dado por  $F_k(a) = a^p$ .

Si definimos  $F_{X/k} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$  mediante la fórmula  $F_{X/k}(\sum a_I x^I) = \sum a_I (x^I)^p$ , entonces el morfismo de Frobenius absoluto  $F(\phi) = \phi^p$  factoriza a través de  $F_k$  y  $F_{X/k}$ . El morfismo  $F : X \rightarrow X$  es altamente ramificado, pues de hecho  $\Omega_{X/X^p}^1 = \Omega_{X/k}^1$ . Sin embargo, si  $X$  es liso,  $F$  es un morfismo plano, pues  $k[T] \cong k[T^p] \oplus Tk[T^p] \oplus \dots \oplus T^{p-1}k[T^p]$  es un  $k[T^p]$  módulo libre, por tanto plano.

**Proposición 6.0.9.** Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son dos morfismos étale, entonces la composición  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es un morfismo étale.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de que los morfismos lisos de dimensión relativa  $n$  son estables bajo composición.  $\diamond$

**Proposición 6.0.10.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo étale y sea  $g : Z \rightarrow Y$  otro morfismo, entonces el morfismo  $\hat{f} : X \times_Y Z \rightarrow Z$  es étale

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del caso liso  $\diamond$

**Proposición 6.0.11.** Si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & = & X \end{array}$$

conmuta y los morfismos  $\pi$  y  $\pi'$  son étale, entonces  $\phi$  es étale.

DEMOSTRACIÓN. Si  $B$  es un  $C$ -módulo plano y  $A$  es un  $B$ -módulo  $C$  plano, entonces  $A$  es  $B$  plano, además si la extensión  $A/C$  es no ramificada y la extensión  $B/C$  es no ramificada, necesariamente la extensión  $A/B$  es no ramificada.  $\diamond$

**Observación 6.0.12.** . La proposición precedente permanece válida si se reemplaza étale por plano o por liso (con las dimensiones relativas correctas).

# Capítulo 7

## Morfismos casi compactos, separados y casi separados.

**Definición.** Un morfismo entre esquemas  $f : X \rightarrow Y$  se dice *casi compacto* si existe una cubierta afín  $\{U_\alpha\}$  de  $Y$ , tal que para toda  $\alpha$ , toda cubierta abierta de la imagen inversa  $f^{-1}(U_\alpha) \subset X$  admite una subcubierta finita. Si  $f : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{k}$  es casi compacto diremos que  $X$  es casi compacto.

**Ejemplo 7.0.1.** Para todo campo  $\mathbb{k}$ , todo morfismo  $f : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{k}$  de esquemas es casi compacto.

**Ejemplo 7.0.2.** Recuerde que un esquema  $X$  se dice noetheriano si toda cadena descendente de cerrados irreducibles distintos es finita. Todo subesquema de un esquema noetheriano es noetheriano, en particular toda cubierta abierta de  $X$  admite una subcubierta finita.

Si  $X$  es noetheriano, puesto que todos sus subesquemas son noetherianos, entonces todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  es casi compacto.

**Ejemplo 7.0.3.** Toda inmersión cerrada es casi compacta. Si  $X$  es noetheriano, toda inmersión abierta también es casi compacta. En general, las inmersiones abiertas no son casi compactas.

**Lema 7.0.4.** 1) Dados  $f : X \rightarrow Y$ , demuestre que  $f$  es casi compacto si y sólo si para todo abierto afín  $U \subset Y$ , toda cubierta abierta de  $f^{-1}(U)$  admite una subcubierta finita.

2) Si  $f : X \rightarrow Y$  es casi compacto y  $g : Y \rightarrow Z$  es casi compacto, entonces  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es casi compacto.

3) Si  $f : X \rightarrow Z$  es casi compacto y  $g : Y \rightarrow Z$  es un morfismo arbitrario, entonces  $\pi_2 : X \times_Z Y \rightarrow Y$  es casi compacto.

**DEMOSTRACIÓN.** Demostraremos únicamente el inciso 3) y dejaremos los otros dos como ejercicio al lector.

Por definición, es suficiente demostrar que existe una cubierta afín  $\{U_\alpha\}$  de  $Y$  tal que para todo  $\alpha$ , toda cubierta abierta de  $\pi_2^{-1}(U_\alpha)$  admite una subcubierta finita. Dado que  $f$  es casi compacta, podemos comenzar con una cubierta afín  $\{V_\beta\}$  de  $Z$  con esta propiedad con respecto a  $f$ , tomar una cubierta afín  $\{U_{\alpha,\beta}\}$  de  $Y$  tal que  $g(U_{\alpha,\beta}) \subset V_\beta$  y trabajar con  $\pi_2^{-1}(U_{\alpha,\beta})$ ; en particular y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $Z$  e  $Y$  son afines. En estas circunstancias es suficiente demostrar que toda cubierta abierta de  $f^{-1}(Y)$  admite una subcubierta finita; pero  $f^{-1}(Z)$  es casi compacto por hipótesis, por tanto existe una cubierta abierta **afín y finita**  $\{W_j\}$  de  $f^{-1}(Z)$ , en cuyo caso

$$\pi_2^{-1}(Y) = X \times_Z Y = \cup_j W_j \times_Z Y,$$

donde cada  $W_j \times_Z Y$  es afín y por tanto casi compacto; como se trata de una unión finita de conjuntos casi compactos, se sigue que  $\pi_2^{-1}(Y)$  es casi compacto.  $\diamond$

**Definición.** Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  se dice

- 1) *separado* si  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  es una inmersión cerrada.
- 2) *casi separado* si  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  es un morfismo casi compacto.
- 3) Si  $\mathbb{k}$  es un campo, diremos que  $X$  es separado (respectivamente casi separado) si el morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{k}$  es separado (respectivamente casi separado).

**Ejemplo 7.0.5.** El espacio afín  $\mathbb{A}^n$  y el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  son esquemas separados.

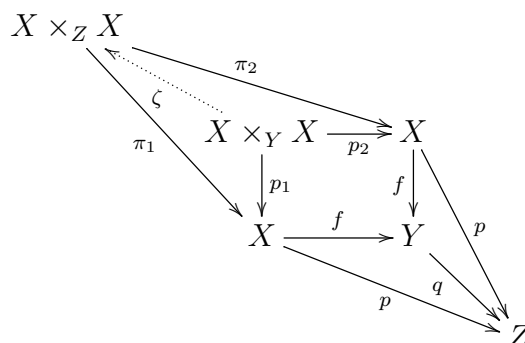
**Ejemplo 7.0.6.** La recta con dos orígenes  $L = \mathbb{A}^1 \cup_{\mathbb{A}^1 - \{0\}} \mathbb{A}^1$  **no es un esquema separado.**

**Lema 7.0.7.** Sean  $p : X \rightarrow Z$  y  $q : Y \rightarrow Z$  dos esquemas sobre  $Z$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas sobre  $Z$ , entonces

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{j} & X \times_Z X \\ f \circ p_1 = f \circ p_2 \downarrow & & \downarrow f \times_Z f \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_Z Y \end{array}$$

es un diagrama cartesiano.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por observar que el diagrama conmutativo



induce un morfismo  $\zeta : X \times_Y X \rightarrow X \times_Z X$  por la propiedad universal de  $X \times_Z X$ .

Análogamente, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Z X & \xrightarrow{\pi_2} & X & & \\
 \pi_1 \downarrow & & p \downarrow & \searrow f & \\
 X & \xrightarrow{p} & Z & \xleftarrow{q} & Y \\
 & \searrow f & q \uparrow & & \uparrow pr_2 \\
 & & Y & \xleftarrow{pr_1} & Y \times_Z Y
 \end{array}$$

induce el morfismo  $f \times_Z f : X \times_Z X \rightarrow Y \times_Z Y$  por la propiedad universal de  $Y \times_Z Y$ .

Claramente el siguiente diagrama conmuta para  $k = 1$  o  $2$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_Z X & \xrightarrow{f \times_Z f} & Y \times_Z Y \\
 \pi_k \downarrow & & \downarrow pr_k \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Por tanto, si  $W$  es un esquema y el diagrama siguiente conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{g} & X \times_Z X \\
 h \downarrow & & \downarrow f \times_Z f \\
 Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_Z Y
 \end{array}$$

a fortiori se tendrá un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{\pi_2 \circ g} & X \\
 \pi_1 \circ g \downarrow & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

de donde se deduce la existencia de un morfismo  $t : W \rightarrow X \times_Y X$  tal que  $j \circ t = g$  y  $f \circ p_1 \circ j = f \circ p_2 \circ j = h$ .  $\diamond$

**Corolario 7.0.8.** Sean  $p : X \rightarrow Z$  y  $q : Y \rightarrow Z$  dos esquemas sobre  $Z$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas sobre  $Z$ ; si  $Y \rightarrow Z$  es un morfismo separado, entonces  $X \times_Y X \rightarrow X \times_Z X$  es una inmersión cerrada.

**Corolario 7.0.9.** Sean  $p : X \rightarrow Z$  y  $q : Y \rightarrow Z$  dos esquemas sobre  $Z$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas sobre  $Z$ ; entonces

- (1) Si  $f$  y  $q$  son separados, entonces  $p = q \circ f$  es separado.
- (2) Si  $q$  es separado y  $f$  es casi separado, entonces  $p$  es casi separado.
- (3) De hecho, si  $p$  y  $q$  son separados, entonces  $f$  es separado.
- (4) Análogamente, si  $q$  es **separado** y  $p$  es casi separado, entonces  $f$  es casi separado.

DEMOSTRACIÓN. El diagrama siguiente es conmutativo y el morfismo horizontal es una inmersión cerrada.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Delta \downarrow & \searrow \Delta & \\ X \times_Y X & \longrightarrow & X \times_Z X \end{array}$$

Recuerde que la composición de inmersiones cerradas es una inmersión cerrada. Finalmente, dados morfismos  $f, g$  y  $h = f \circ g$ , si  $h$  es casi compacto y  $g$  es una inmersión cerrada, entonces  $f$  es casi compacto.  $\diamond$



# Capítulo 8

## Sitios de Grothendieck

### 8.1. Sitios de Grothendieck I.

Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y un objeto  $c \in \mathcal{C}$ , consideraremos familias  $\{c_\alpha \rightarrow c\}$  de morfismos en  $\mathcal{C}$  que llamaremos *cubrientes* de  $c$ .

**Definición.**(1a. definición de *Sitio*). Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una categoría en la que existen los productos fibrados y para cada objeto  $c \in \mathcal{C}$  tenemos definida una colección de cubrientes. Diremos  $\mathcal{C}$  es un *sitio* si para todo objeto  $c \in \mathcal{C}$  la colección de cubrientes de  $c$  satisface las siguientes propiedades:

- 1) La familia  $c \xrightarrow{\text{id}} c$  es un cubriente.
- 2) Si la familia  $\{c_\alpha \rightarrow c\}_\alpha$  es un cubriente de  $c$  y para cada  $\alpha$  las familias  $\{c_{\beta,\alpha} \rightarrow c_\alpha\}_\beta$  son cubrientes de  $c_\alpha$ , entonces la familia  $\{c_{\beta,\alpha} \rightarrow c\}_{\beta,\alpha}$  es un cubriente de  $c$ .
- 3) Para todo cubriente  $\{c_\alpha \rightarrow c\}$  de  $c$  y para todo morfismo  $b \rightarrow c$  en  $\mathcal{C}$ , la familia  $\{b \times_c c_\alpha \rightarrow b\}$  es un cubriente de  $b$ .

**Ejemplo 8.1.1.** (*El pequeño sitio étale*) Dado un esquema  $X$ , considere la subcategoría  $\acute{E}t(X) \subset \text{Sch}/X$  de esquemas sobre  $X$  para los que el morfismo estructural  $Y \rightarrow X$  es étale. Para cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & Z \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

en el que tanto  $f$  como  $g$  son morfismos étale, entonces necesariamente  $h$  es étale. Si definimos los cubrientes de un objeto  $Z \in \acute{E}t(X)$  como las familias

$$\{f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow Z\}$$

en  $\acute{E}t(X)$  tales que  $Z = \cup_{\alpha} \text{Im } f_{\alpha}$ , entonces las familias cubrientes satisfacen las tres propiedades mencionadas (los morfismos étale son estables bajo cambio de base) en la definición previa, de modo que la categoría  $\acute{E}t(X)$  provista con esta colección de cubrientes forma un sitio, llamado el pequeño sitio étale de  $X$  y denotado mediante  $X_{\acute{e}t}$ .

**Ejemplo 8.1.2.** (El gran sitio étale) Dado un esquema  $X$ , definimos el gran sitio étale de  $X$  como la categoría  $\text{Sch}/X$  de esquemas sobre  $X$  donde los cubrientes de  $Y$  son los cubrientes étale. Observe que esta categoría es cerrada bajo producto fibrado.

**Ejemplo 8.1.3.** Dado un esquema  $X$ , definimos el sitio fielmente plano de  $X$ , denotada mediante  $X_{fp}$ , como la subcategoría de  $\text{Sch}/X$  de esquemas planos sobre  $X$  donde, para todo  $Y$  plano sobre  $X$ , los cubrientes de  $Y$  son familias  $\{f_{\alpha} : Y_{\alpha} \rightarrow Y\}$  de morfismos planos tales que  $Y = \cup_{\alpha} \text{Im}(f_{\alpha})$ . Recuerde que los morfismos planos son estables bajo cambio de base.

**Ejemplo 8.1.4.** (El sitio fielmente plano y casi compacto). Fijémonos en la subcategoría de  $\text{Sch}/X$  donde los morfismos estructurales son planos y casi compactos, lo mismo que los morfismos entre los  $X$ -esquemas. En esta categoría decimos que una familia  $\{f_{\alpha} : Y_{\alpha} \rightarrow Y\}$  es un cubriente si  $Y = \cup_{\alpha} \text{Im}(f_{\alpha})$ . Observe que esta categoría es cerrada bajo producto fibrado y por tanto la presente elección de cubrientes constituye un sito, llamado el sito fielmente plano y casi compacto de  $X$  y denotado mediante  $X_{fpqc}$ .

**Observaciones 8.1.5.** 1) En los ejemplos precedentes (8.1.1, 8.1.2, 8.1.3 y 8.1.4), es suficiente considerar cubrientes de la forma  $Z \rightarrow Y$ . En efecto, dado un cubriente  $\{Y_{\alpha} \rightarrow Y\}$  podemos definir  $Z = \sqcup_{\alpha} Y_{\alpha}$  y el morfismo natural  $Z \rightarrow Y$  tiene la propiedad deseada, además de ser suprayectivo.

2) Si  $Y = \text{Spec } A$ ,  $Z = \text{Spec } B$  y el morfismo  $Z \rightarrow Y$  es plano y suprayectivo, entonces  $B$  es una  $A$ -álgebra que es un  $A$ -módulo plano. En efecto, supongamos que se tiene una sucesión corta de  $A$ -módulos

$$N \rightarrow M \rightarrow N' \rightarrow 0$$

de tal suerte que la sucesión

$$0 \rightarrow N \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \rightarrow N' \otimes_A B \rightarrow 0$$

es exacta pero el morfismo  $N \rightarrow M$  no es inyectivo, es decir  $K := \text{Ker}(N \rightarrow M)$  no es cero, pero  $K \otimes_A B = 0$ . No es difícil convencerse que esto es equivalente a que existe un elemento  $b \in \text{Ann}_A(K)$  que es una unidad en  $B$ , es decir en  $B$  se puede escribir  $1 = \frac{b}{b}$  y por tanto  $n \otimes 1 = n \otimes \frac{b}{b} = bn \otimes \frac{1}{b} = 0$  para todo  $n \in N$ , pero esto es imposible pues  $\text{Ann}_A(N)$  es un ideal, por tanto está contenido en algún ideal primo  $\mathfrak{p}$  de  $A$  y como  $Z \rightarrow Y$  es suprayectivo, existe un ideal primo  $\mathfrak{q} \subset B$  tal que  $b \in \text{Ann}_A(N) \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ ; lo que nos fuerza a concluir que  $K = 0$ .

La observación precedente justifica la siguiente definición:

**Definición.** Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  se dice *fielmente plano* si es un morfismo plano

y suprayectivo; en particular en este caso se tiene que  $f_*\mathcal{O}_{x,X}$  es un  $\mathcal{O}_{f(x),Y}$ -módulo fielmente plano para todo  $x \in X$ .

### 8.1.1. Gavillas

Si  $\mathcal{C}$  es un sitio de Grothendieck, un funtor contravariante  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  en una categoría  $\mathcal{D}$  se dice una *gavilla* si para todo objeto  $c \in \mathcal{C}$  y para todo cubriente  $\{c_\alpha \rightarrow c\}$ , la sucesión

$$\mathcal{F}(c) \longrightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{F}(c_{\alpha}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{res}_{\alpha,\beta}} \\ \xrightarrow{\text{res}_{\beta,\alpha}} \end{array} \prod_{\alpha \neq \beta} \mathcal{F}(c_{\alpha} \times_c c_{\beta})$$

es exacta; es decir,  $\mathcal{F}(c)$  es el ecualizador de  $\prod_{\alpha} \mathcal{F}(c_{\alpha}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{res}_{\alpha,\beta}} \\ \xrightarrow{\text{res}_{\beta,\alpha}} \end{array} \prod_{\alpha \neq \beta} \mathcal{F}(c_{\alpha} \times_c c_{\beta})$ .

**Ejemplo 8.1.6.** Dado un esquema  $X$ , definimos el funtor estructural  $\mathcal{O}_{X_{\acute{e}t}}$  de  $X_{\acute{e}t}$  (que denotaremos simplemente como  $\mathcal{O}_{\acute{e}t}$  cuando no haya lugar a confusión) como sigue: para todo morfismo  $s : V \rightarrow X$  étale, definimos

$$\mathcal{O}_{X_{\acute{e}t}}(V) := \Gamma(V, s^*\mathcal{O}_X) = s^*\mathcal{O}_X(V) = (s^{-1}\mathcal{O}_X \otimes_{s^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_V)(V) = \mathcal{O}_V(V).$$

**Lema 8.1.7.** El funtor contravariante  $\mathcal{O}_{\acute{e}t}$  es de hecho una gavilla.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si  $V \in X_{\acute{e}t}$  y  $\{V_{\alpha} \rightarrow V\}$  es un cubriente étale, sin pérdida de generalidad podemos suponer que el cubriente es de la forma  $h : W \rightarrow V$  y la afirmación se reduce a demostrar la exactitud de

$$(8.1.1) \quad \mathcal{O}_{\acute{e}t}(V) \xrightarrow{h^*} \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W \times_V W).$$

I) Supongamos que  $V$  y  $W$  son esquemas afines, es decir  $V = \text{Spec } A$  y  $W = \text{Spec } B$  con  $B$  una  $A$ -álgebra fielmente plana como  $A$ -módulo; en este caso la exactitud de (8.1.1) se transforma en la exactitud de

$$(8.1.2) \quad A \longrightarrow B \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} B \otimes_A B.$$

a) Supongamos para empezar que estamos en el caso particular en que  $B = A \oplus C$ , de modo que (8.1.2) se puede reescribir como

$$A \longrightarrow A \oplus C \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} A \oplus C \otimes_A A \oplus A \otimes_A C \oplus C \otimes_A C$$

$$a \longmapsto (a, 0)$$

$$(a, c) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} (a, c) \otimes (1, 0) = (a, c, 0, 0) \\ (1, 0) \otimes (a, c) = (a, 0, c, 0)$$

de modo que el ecualizador de  $\pi_1^*$  y  $\pi_2^*$  es precisamente la imagen de  $A$ , que es isomorfa a  $A$ .

b) Si  $A$  no es sumando directo de  $B$ , pero como  $B$  es un  $A$ -módulo fielmente plano, la sucesión (8.1.2) es exacta si y sólo si la sucesión

$$B = A \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} (B \otimes_A B) \otimes_A B$$

lo es, donde el homomorfismo  $B \rightarrow B \otimes_A B$  está dado mediante  $b \mapsto 1 \otimes b$ ; pero el homomorfismo  $B \otimes_A B \rightarrow B$  que manda  $b \otimes b' \mapsto bb'$  es su inverso izquierdo, por tanto  $B \rightarrow B \otimes_A B$  escinde y la conclusión se sigue de a).

II) Si  $V = \text{Spec } A$  es afín y  $W$  no, podemos tomar una cubierta (Zariski) abierta afín  $\{W_\alpha\}$  de  $W$  y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \longrightarrow \mathcal{O}_W(W) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \mathcal{O}_{W \times_V W}(W \times_V W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_\alpha \mathcal{O}_W(W_\alpha) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_{W \times_V W}(W_\alpha \times_V W_\beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Observe que como  $W \rightarrow V$  es étale y dado que las inclusiones abiertas son étale, entonces  $\{W_\alpha \rightarrow V\}$  es también un cubriente étale, que podemos sustituir por el cubriente (afín) étale  $\{W' \rightarrow V\}$ , donde  $W' = \sqcup_\alpha W_\alpha$ . Puesto que  $W' \times_V W' = \sqcup_{\alpha, \beta} W_\alpha \times_V W_\beta$  y en virtud de que  $\mathcal{O}_{\acute{e}t}(W') = \prod_\alpha \mathcal{O}_{W_\alpha}(W_\alpha)$  y  $\mathcal{O}_{\acute{e}t}(W' \times_V W') = \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_{W_\alpha \times_V W_\beta}(W_\alpha \times_V W_\beta)$ , el diagrama precedente puede reescribirse como

$$\begin{array}{ccc} A \longrightarrow \mathcal{O}_W(W) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \mathcal{O}_{W \times_V W}(W \times_V W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W') & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\pi}_1^*} \\ \xrightarrow{\bar{\pi}_2^*} \end{array} & \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W' \times_V W') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Pero por I), el ecualizador del segundo renglón es precisamente  $A$ , en particular la composición  $A \rightarrow \mathcal{O}_W(W) \rightarrow \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W')$  es inyectiva, por tanto  $A \rightarrow \mathcal{O}_W(W)$  es un homomorfismo inyectivo y el ecualizador de  $\mathcal{O}_W(W) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} \mathcal{O}_{W \times_V W}(W \times_V W)$  es  $A$ .

III) En general, podemos considerar cubiertas de Zariski afines  $\{V_i\}$  de  $V$  y  $\{W_j\}$  de  $W$  tales que para toda  $j$ ,  $h(W_j) \subset V_i$  para alguna  $i$  (no necesariamente única), lo

que induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{\acute{e}t}(V) & \xrightarrow{h^*} & \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W \times_V W) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_i \mathcal{O}_{\acute{e}t}(V_i) & \xrightarrow{h^*} & \prod_j \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W_j) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\pi}_1^*} \\ \xrightarrow{\bar{\pi}_2^*} \end{array} & \prod_{j,k} \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W_j \times_V W_k) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \prod_{i,j} \mathcal{O}_{\acute{e}t}(V_i \cap V_j) & \xrightarrow{h^*} & \prod_{k,l} \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W_k \cap W_l) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\pi}_1^*} \\ \xrightarrow{\tilde{\pi}_2^*} \end{array} & \prod_{k,l,m,n} \mathcal{O}_{\acute{e}t}((W_k \cap W_m) \times_V (W_l \cap W_n))
 \end{array}$$

donde las columnas son exactas porque expresan el hecho de que  $\mathcal{O}_Z$  es una gavilla en cualquier esquema  $Z$  provisto con la topología de Zariski.

Observe que  $W_j \times_V W_k = \emptyset$  si  $h(W_j)$  y  $h(W_k)$  no están contenidos en un abierto afín común  $V_i$ ; análogamente,  $(W_k \cap W_m) \times_V (W_l \cap W_n) = \emptyset$  si la cuádruple intersección no está contenida en alguna intersección  $V_i \cap V_j$ . Los sumandos directos correspondientes al conjunto vacío son cero, de modo que no contribuyen ni alteran la suma directa.

Por tanto, si nos fijamos en los productos  $\prod_{W_j \rightarrow V_i} \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W_j)$  y  $\prod_{\substack{W_j \rightarrow V_i \\ W_k \rightarrow V_i}} \mathcal{O}_{\acute{e}t}(W_j \times_V W_k)$ , el

correspondiente ecualizador es  $\mathcal{O}_{\acute{e}t}(V_i)$  por II), de modo que  $h^*$  es un monomorfismo tanto en la segunda como en la tercera línea y la usual “persecución” de elementos en el diagrama nos permite concluir que el primer renglón es exacto.

## 8.2. Sitios de Grothendieck II.

Dado un esquema  $X$  y una gavilla  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos en  $X$  (con la topología de Zariski), definimos un funtor  $\mathcal{F}_{\acute{e}t}$  en  $X_{\acute{e}t}$  como sigue: para cualquier morfismo  $s : V \rightarrow X$  étale, definimos

$$\mathcal{F}_{\acute{e}t}(V) := \Gamma(V, s^* \mathcal{F}) = s^* \mathcal{F}(V) = (s^{-1} \mathcal{F} \otimes_{s^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_V)(V)$$

**Lema 8.2.1.** *Si  $\mathcal{F}$  es una gavilla casi coherente, entonces el funtor contravariante  $\mathcal{F}_{\acute{e}t}$  es una gavilla en el sitio  $X_{\acute{e}t}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Recuerde que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el cubriente étale de  $V$  es de la forma  $h : W \rightarrow V$ , por lo que basta con demostrar la exactitud de la sucesión

$$(8.2.1) \quad \mathcal{F}_{\acute{e}t} \xrightarrow{h^*} \mathcal{F}_{\acute{e}t}(W) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} \mathcal{F}_{\acute{e}t}(W \times_V W).$$

Observe que al tratarse de un cubriente étale se tiene un diagrama conmutativo

$$(8.2.2) \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h} & V \\ & \searrow s' & \swarrow s \\ & & X \end{array}$$

que extiende a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} W \times_V W & \xrightarrow{\pi_2} & W & & \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow h & \searrow s' & \\ W & \xrightarrow{h} & V & & \\ & \searrow s' & \swarrow s & \searrow s' & \\ & & & & X \end{array}$$

de donde resulta evidente que el morfismo estructural  $W \times_V W \rightarrow X$  es  $s' \circ \pi_1 = s' \circ \pi_2$ .

Procederemos de manera análoga a como se demostró que el funtor  $\mathcal{O}_{\acute{e}t}$  es una gavilla en  $X_{\acute{e}t}$ .

I) Supongamos que  $V$  y  $W$  son esquemas afines, es decir  $V = \text{Spec } A$  y  $W = \text{Spec } B$  con  $B$  una  $A$ -álgebra fielmente plana como  $A$ -módulo; en este caso se tiene

$$\begin{aligned} s^{-1} \mathcal{F}(V) &= \varinjlim_{s(V) \subset U} \mathcal{F}(U), & s'^{-1} \mathcal{F}(W) &= \varinjlim_{s'(W) \subset U} \mathcal{F}(U), \\ s^{-1} \mathcal{O}_X(V) &= \varinjlim_{s(V) \subset U} \mathcal{O}_X(U) \quad \text{y} \quad s'^{-1} \mathcal{O}_X(W) &= \varinjlim_{s'(W) \subset U} \mathcal{O}_X(U); \end{aligned}$$

pero  $h : W \rightarrow V$  es suprayectivo, por ser un cubriente, de modo que

$$s'(W) = s \circ h(W) = s(V),$$

por tanto

$$s^{-1}\mathcal{F}(V) = s'^{-1}\mathcal{F}(W) = N,$$

$$s^{-1}\mathcal{O}_X(V) = s'^{-1}\mathcal{O}_X(V) = R,$$

de donde  $s^*\mathcal{F}(V) = N \otimes_R A =: M$  y  $s'^*\mathcal{F}(V) = N \otimes_R B = (N \otimes_R A) \otimes_A B = M \otimes_A B$  y la exactitud de (8.2.1) se transforma en la exactitud de

$$(8.2.3) \quad M \longrightarrow M \otimes_A B \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} M \otimes_A (B \otimes_A B).$$

a) Supongamos para empezar que estamos en el caso particular en que  $B = A \oplus C$ , de modo que (8.2.3) se puede reescribir como

$$M \longrightarrow M \oplus M \otimes_A C \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} M \oplus M \otimes_A (C \otimes_A A) \oplus M \otimes_A (A \otimes_A C) \oplus M \otimes_A (C \otimes_A C)$$

$$m \longmapsto (m, 0)$$

$$(m, n) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} (m, n) \otimes (1, 0) = (m, n, 0, 0) \\ (1, 0) \otimes (m, n) = (m, 0, n, 0)$$

de modo que el ecualizador de  $\pi_1^*$  y  $\pi_2^*$  es isomorfo a  $M$ .

b) Si  $A$  no es sumando directo de  $B$ , puesto que  $B$  es un  $A$ -módulo fielmente plano, la sucesión (8.2.3) es exacta si y sólo si la sucesión

$$M \otimes_A B \longrightarrow (M \otimes_A B) \otimes_A B \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} M \otimes_A (B \otimes_A B) \otimes_A B,$$

que se obtiene después de formar el producto tensorial con  $B$ , es exacta; donde el homomorfismo  $B \rightarrow B \otimes_A B$  está dado mediante  $b \mapsto 1 \otimes b$ ; pero el homomorfismo  $B \otimes_A B \rightarrow B$  que manda  $b \otimes b' \mapsto bb'$  es su inverso izquierdo, por tanto  $B \rightarrow B \otimes_A B$  escinde y la conclusión se sigue de a).

II) Si  $V = \text{Spec } A$  es afín y  $W$  no, podemos tomar una cubierta (Zariski) abierta afín  $\{W_\alpha\}$  de  $W$  y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M \longrightarrow s'^*\mathcal{F}(W) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & (s' \circ \pi_j)^*\mathcal{F}(W \times_V W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_\alpha s'^*\mathcal{F}(W_\alpha) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \prod_{\alpha, \beta} (s' \circ \pi_j)^*\mathcal{F}(W_\alpha \times_V W_\beta) \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

y la conclusión se obtiene como en el inciso II) del lema 11.2.2 *mutatis mutandis*.

III) En general, podemos considerar cubiertas de Zariski afines  $\{V_i\}$  de  $V$  y  $\{W_j\}$  de  $W$  tales que para toda  $j$ ,  $h(W_j) \subset V_i$  para alguna  $i$  (no necesariamente única), lo que induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}_{\acute{e}t}(V) & \xrightarrow{h^*} & \mathcal{F}_{\acute{e}t}(W) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \mathcal{F}_{\acute{e}t}(W \times_V W) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_i \mathcal{F}_{\acute{e}t}(V_i) & \xrightarrow{h^*} & \prod_j \mathcal{F}_{\acute{e}t}(W_j) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\pi}_1^*} \\ \xrightarrow{\tilde{\pi}_2^*} \end{array} & \prod_{j,k} \mathcal{F}_{\acute{e}t}(W_j \times_V W_k) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \prod_{i,j} \mathcal{F}_{\acute{e}t}(V_i \cap V_j) & \xrightarrow{h^*} & \prod_{k,l} \mathcal{F}_{\acute{e}t}(W_k \cap W_l) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\pi}_1^*} \\ \xrightarrow{\tilde{\pi}_2^*} \end{array} & \prod_{k,l,m,n} \mathcal{F}_{\acute{e}t}((W_k \cap W_m) \times_V (W_l \cap W_n))
 \end{array}$$

donde las columnas son exactas y nuevamente la exactitud del primer renglón se obtiene como en III) del lema 11.2.2, *mutatis mutandis*.  $\diamond$

**Observación 8.2.2.** Observe que tanto en el lema 11.2.2 como en el presente lema, sólo se usó que el morfismo  $W \rightarrow V$  es fielmente plano, la no ramificación de  $h$  es una hipótesis innecesaria en el argumento. Tampoco se usó que los morfismos estructurales son étale (ni siquiera planos), de modo que la misma construcción produce gavillas en los sitios  $X_{fppf}$  y  $X_{fpqc}$ , así como en el sitio étale grande asociado a  $X$ .

### 8.2.1. El funtor de puntos

Supongamos que tenemos un esquema  $S$ , dos  $S$ -esquemas  $X$  y  $Z$  y considere el sitio  $X_\eta$ , donde  $\eta$  es el sitio de Zariski, étale, fppf ó fpqc. El esquema  $Z$  define entonces un funtor

$$\mathrm{Hom}_S : X_\eta \longrightarrow \mathcal{S}ets$$

$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}_S(Y, Z)$$

de la categoría de  $X$ -esquemas, dotada de la topología de Grothendieck  $\eta$ , en la categoría de conjuntos.

**Proposición 8.2.3.** El funtor  $\underline{Z} = \mathrm{Hom}_S(-, Z)$  define una gavilla en el sitio  $X_\eta$ .



DEMOSTRACIÓN. Recuerde que un morfismo entre  $S$ -esquemas  $Y \rightarrow Z$  es un par  $(f, f^\#)$ , donde

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow t & \swarrow s \\ & & S \end{array}$$

y  $f^\# : \mathcal{O}_Z \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$  es un homomorfismo de gavillas de anillos tal que

$$\begin{array}{ccc} s_*(f_*\mathcal{O}_Y) = t_*\mathcal{O}_Y & \xleftarrow{f^\#} & s_*\mathcal{O}_Z \\ & \searrow t^\# & \swarrow s^\# \\ & & S \end{array}$$

conmuta.

En el sitio de Zariski la afirmación del lema es obvia: si se tiene una cubierta afín  $\{Y_\alpha\}$  de  $Y$  y morfismos de  $S$ -esquemas  $(f_\alpha, f_\alpha^\#) : Y_\alpha \rightarrow Z$  que coinciden en las intersecciones, estos morfismos extienden a un morfismo  $f : Y \rightarrow X$  mediante  $f(y) := f_\alpha(y)$  para cualquier  $\alpha$  tal que  $y \in Y_\alpha$ . Por otra parte, los homomorfismos  $f_\alpha^\#$  inducen de manera natural un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_Z & \\ \Pi f_\alpha^\# \swarrow & & \searrow \Pi (f_\gamma \circ j_\gamma)^\# \\ \prod_{\alpha} (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{Y_\alpha} & \xrightleftharpoons[\text{res}_\beta]{\text{res}_\alpha} & \prod_{\alpha \neq \beta} (f_\gamma \circ j_\gamma)_*\mathcal{O}_{Y_\alpha \cap Y_\beta} \end{array}$$

donde  $j_\gamma : Y_\gamma \rightarrow Y$  es la inclusión abierta y en el producto del término inferior derecho  $f_\alpha \circ j_\alpha|_{Y_\alpha \cap Y_\beta} = f_\beta \circ j_\beta|_{Y_\alpha \cap Y_\beta}$ .

Puesto que  $\mathcal{O}_Y$  es una gavilla, se demuestra fácilmente que  $f_*\mathcal{O}_Y$  es de hecho el ecualizador de  $\text{res}_\alpha$  y  $\text{res}_\beta$ , de modo que  $\Pi f_\alpha^\#$  induce un homomorfismo  $f^\# : \mathcal{O}_Z \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ .

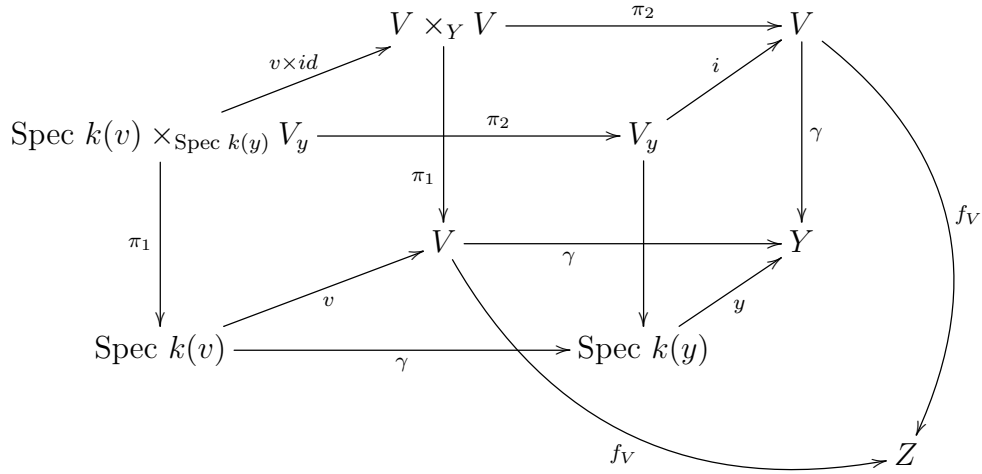
Supondremos entonces que  $X_\eta$  es un sitio distinto al sitio de Zariski. En este caso, sin pérdida de generalidad podemos tomar la cubierta  $\gamma : V = \sqcup_{\alpha} V_\alpha \rightarrow Y$ , de modo que la sucesión se convierte en

$$\text{Hom}_S(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_S(V, Z) \xrightarrow[\pi_2^*]{\pi_1^*} \prod_{\alpha, \beta} \text{Hom}_S(V \times_Y V, Z)$$

y nos preguntamos si efectivamente  $\text{Hom}_S(Y, X)$  es el ecualizador de  $(\pi_1^*, \pi_2^*)$ .

Comencemos por observar que si  $f_V : V \rightarrow Z$  es un morfismo de esquemas tal que  $\pi_1 \circ f_V = \pi_2 \circ f_V$ , entonces para todo punto  $y \in Y$  y  $v \in V$  con  $\gamma(v) = y$  se tiene un

diagrama conmutativo



donde todas las caras del cubo son cuadrados cartesianos. En consecuencia,

$$\begin{aligned} f_V(v) &= f_V \circ v \circ \pi_1(\text{Spec } k(v) \times_{\text{Spec } k(y)} V_y) = f_V \circ \pi_2 \circ (v \times id)(\text{Spec } k(v) \times_{\text{Spec } k(y)} V_y) \\ &= f_V \circ i \circ \pi_2(\text{Spec } k(v) \times_{\text{Spec } k(y)} V_y) = f_V(V_y), \end{aligned}$$

es decir, para todo  $y \in Y$  la restricción  $f_V|_{V_y}$  es constante, de modo que al nivel de conjuntos, podemos definir  $f : Y \rightarrow X$  mediante  $f(y) = f_V(v)$ , para cualquier  $v \in V_y$ .

Por otro lado  $(\pi_1 \circ f_V)^\# = (\pi_2 \circ f_V)^\#$ , es decir  $\pi_1^\# \circ f_V^\# = \pi_2^\# \circ f_V^\#$ , pero  $\mathcal{O}_Y$  es una gavilla en el sitio  $X_\eta$  y  $\{\gamma : V \rightarrow Y\}$  es una cubierta en este sitio, por tanto se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_Z & \\ & \swarrow & \searrow \\ (f_V)_* \mathcal{O}_V & \xrightarrow{\pi_1^\#} & (\pi_1)_* ((f_V)_* \mathcal{O}_{V \times_Y V}) = (\pi_2)_* ((f_V)_* \mathcal{O}_{V \times_Y V}) \\ & \xrightarrow{\pi_2^\#} & \end{array}$$

pero la sucesión

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow[\pi_2^\#]{\pi_1^\#} \mathcal{O}_{V \times_Y V}$$

es exacta, de modo que  $f_V^\#$  factoriza a través de  $f^\# : \mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_Y$ .  $\diamond$

### 8.3. Gavillas localmente constantes.

**Definición.** Si  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \text{Sch}/X \rightarrow \mathcal{A}b$  son dos funtores y  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es una transformación natural, definimos los funtores  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Coker } f$ ,  $\text{Im } f$  y  $\text{Coim } f$  como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f(V) &:= \text{Ker } [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(V)], \\ \text{Coker } f(V) &:= \text{Coker } [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(V)], \\ \text{Im } f(V) &:= \text{Im } [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(V)], \\ \text{Coim } f(V) &:= \text{Coim } [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(V)]. \end{aligned}$$

**Lema 8.3.1.** Sean  $X_\eta$  el sitio étale (respectivamente fppf o fpqc) y  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  funtores como en la definición precedente. Si  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es una transformación natural y  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son gavillas en el sitio  $X_\eta$  entonces el funtor  $\text{Ker } f$  es de hecho una gavilla en  $X_\eta$

DEMOSTRACIÓN.  $\text{Ker } f$  será una gavilla si la sucesión

$$\text{Ker } f(V) \longrightarrow \text{Ker } f(U) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} \text{Ker } f(U \times_V U)$$

es exacta para todo  $V \in X_\eta$  y para todo cubriente  $h : U \rightarrow V$  in  $X_\eta$ . Como  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  gavillas tenemos el siguiente diagrama conmutativo, con los dos últimos renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f(V) & \xrightarrow{h^*} & \text{Ker } f(U) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & \text{Ker } f(U \times_V U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h^*} & \mathcal{F}(U) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & \mathcal{F}(U \times_V U) \\ \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{h^*} & \mathcal{G}(U) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & \mathcal{G}(U \times_V U) \end{array}$$

y la afirmación se obtiene con el argumento usual de persecución en el diagrama.  $\diamond$

**Lema 8.3.2.** Sea  $\mathcal{F} : X_\eta \rightarrow \text{Sets}$  un funtor, entonces existe una única gavilla  $\hat{\mathcal{F}}$  tal que:

- Existe un morfismo de pregavillas  $i : \mathcal{F} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ ,
- para toda transformación natural  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  con  $\mathcal{G}$  una gavilla, existe un único morfismo de gavillas  $\hat{\phi} : \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{i} & \hat{\mathcal{F}} \\ & \searrow \phi & \swarrow \hat{\phi} \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. La construcción de la gavilla  $\hat{\mathcal{F}}$  correspondiente a la pregavilla  $\mathcal{F}$  la dividiremos en dos partes. Recuerde que para toda cubierta  $U \rightarrow V$  en  $X_\eta$ , deseamos obtener una sucesión exacta

$$\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} \mathcal{F}(U \times_V U).$$

I) Hacemos  $\mathcal{F}$  separada, es decir, definimos  $\mathcal{F}'$  de tal modo que  $0 \rightarrow \mathcal{F}'(V) \rightarrow \mathcal{F}'(U)$  sea exacta. Para tal efecto, definamos

$$\mathcal{F}'(V) := \varinjlim_{U \rightarrow V} \text{Im}(\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)).$$

II) La exactitud en el término intermedio se obtiene tomando

$$\hat{\mathcal{F}}(V) := \varinjlim_{U \rightarrow V} \text{Eq}(\mathcal{F}'(U) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} \mathcal{F}'(U \times_V U)),$$

donde  $\text{Eq}$  es el ecualizador de  $\pi_1^*$  y  $\pi_2^*$ . Se deja como ejercicio al lector verificar los detalles.  $\diamond$

## 8.4. Gavillas constantes.

El siguiente es un ejemplo decisivo, porque será precisamente en las gavillas de este tipo donde se observe la diferencia entre cohomología étale y cohomología de Zariski. En la topología de Zariski, dado un grupo abeliano  $M$ , definimos la pregavilla constante  $M$  mediante la sencilla fórmula  $M(U) = M$  para todo abierto no vacío de  $X$  y  $M(\emptyset) = \{0\}$ . Esta pregavilla no es una gavilla, pues si  $X = U \sqcup V$ , entonces la sucesión corta

$$0 \longrightarrow M(X) \longrightarrow M(U) \times M(V) \rightrightarrows M(U \cap V)$$

se convierte en

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \times M \rightrightarrows 0$$

que evidentemente no es exacta. De este modo, incluso en la topología de Zariski debemos considerar la gavilla asociada a esta pregavilla. No es difícil convencerse de que la gavilla  $\hat{M}$  asociada a la pregavilla constante  $M$  puede definirse como  $\hat{M}(V) = M^k$ , donde  $k$  es el número de componentes conexas de  $V$ .

De manera similar, definiremos la *gavilla constante*  $\hat{M}$  en  $X_\eta$  como  $\hat{M}(V) = M^k$ , para todo esquema  $V \in X_\eta$ , donde  $k$  es el número de componentes conexas de  $V$ .

Un ejemplo particularmente importante se obtiene si tomamos  $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  para algún entero  $n$ .

## 8.5. La gavilla $\mu_n$ .

Al igual que los haces vectoriales triviales son solo un caso particular del concepto mas general de haz vectorial, de la misma manera, las gavillas constantes son un caso particular de un concepto mas general, el de gavillas localmente constantes.

**Definición.** Una gavilla  $\mathcal{F}$  sobre  $X_\eta$  se dice *localmente constante* si existe una cubierta  $U \rightarrow X$  de  $X$  tal que la restricción de  $\mathcal{F}$  a  $U$  resulta una gavilla constante. Observe que si  $V \rightarrow U$  es un morfismo en  $X_\eta$  que conmuta con los morfismos estructurales sobre  $X$ , entonces  $\mathcal{F}|_V(V) := \mathcal{F}(V)$ .

**Ejemplo 8.5.1.** *El ejemplo más importante es la gavilla de raíces de la unidad en el sitio  $X_{\text{ét}}$ , que se construye como sigue:*

Sea  $n$  un entero y considere al morfismo  $n : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  dado por  $n(f) := f^n$ . Como  $\mathbb{G}_m$  es una gavilla étale, entonces la pregavilla  $\mu_n := \text{Ker } n$  es una gavilla étale. De hecho, es una gavilla localmente constante, como se verá a continuación. Considere primero el siguiente ejemplo particular

Sea  $X = \text{Spec } \mathbb{Q}$  y considere la gavilla  $\mu_{15}$  sobre  $X$ . Considere las cubiertas étales siguientes

$$V = \text{Spec } \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow X,$$

$$W = \text{Spec } \mathbb{Q}(\zeta_3) \rightarrow X, \text{ donde } \zeta_3 \text{ es una raíz cúbica primitiva de la unidad;}$$

$$U = \text{Spec } \mathbb{Q}(\zeta_5) \rightarrow X, \text{ donde } \zeta_5 \text{ es una raíz quinta primitiva de la unidad y}$$

$$S = \text{Spec } \mathbb{Q}(\zeta_{15}) \rightarrow X, \text{ donde } \zeta_{15} \text{ es una raíz quinceava primitiva de la unidad;}$$

entonces tendremos  $\mu_{15}(X) = \{1\}$ ,  $\mu_{15}(V) = \{1\}$ ,  $\mu_{15}(W) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\mu_{15}(U) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $\mu_{15}(S) \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ , por tanto la gavilla  $\mu_{15}$  no es constante, sin embargo, es evidente que si  $L = \text{Spec } K \rightarrow S$  es un cubriente étale, entonces  $\mathbb{Q}(\zeta_{15}) \subset K$  y por tanto  $\mu_{15}(L) \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ , es decir, la restricción de  $\mu_{15}$  a la cubierta  $S \rightarrow X$  será una gavilla constante isomorfa a la gavilla constante  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ .

En general se tendrá que la gavilla  $\mu_n$  no será constante, a menos que  $K(X)$  contenga a todas las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, sin embargo, si  $X$  es un esquema sobre  $k$ , la gavilla  $\mu_n$  siempre será localmente constante, pues al restringirla a la cubierta  $X \times_k k(\omega) \rightarrow X$ , con  $\omega$  una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad, si resulta una gavilla constante, que es de hecho isomorfa a la gavilla constante  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

## 8.6. Gavillas edificables.

Si llevamos la definición de gavillas localmente constantes un paso más adelante, tendremos el concepto de gavillas edificables.

**Definición.** Una gavilla étale  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  se dice *edificable* si existe una cubierta  $\{X_i\}$  de  $X$  mediante subesquemas localmente cerrados, tal que la restricción de  $\mathcal{F}$  a cada uno de los subesquemas  $X_i$  es una gavilla localmente constante.

Por supuesto, toda gavilla localmente constante es una gavilla edificable. Veamos un ejemplo de una gavilla edificable que no sea localmente constante.

Sean  $A$  un grupo abeliano y  $x \in X$  un punto cerrado para la topología de Zariski, definamos una pregavilla rascacielos  $\hat{\mathcal{A}}$  (con grupo  $A$ ) en  $X_{\text{ét}}$  como sigue:

$\hat{\mathcal{A}}(V) = 0$  si  $V \rightarrow X$  es un esquema étale sobre  $X$  pero  $x \notin \text{Im} [V \rightarrow X]$  y  $\hat{\mathcal{A}}(V) = A$  si  $x \in \text{Im} [V \rightarrow X]$ .

Sea  $\mathcal{A}$  la gavilla étale asociada a esta pregavilla. Evidentemente esta gavilla no es localmente constante, pues para toda cubierta étale  $\{U_\alpha \rightarrow X\}$  existe  $U_\alpha$  tal que  $x \in \text{Im} [U_\alpha \rightarrow X]$ , pero la restricción de  $\mathcal{A}$  a  $U_\alpha$  en general no es una gavilla constante, puesto que si  $U_\alpha$  no se reduce a un punto, es posible encontrar algún esquema  $V$  étale sobre  $X$  y tal que  $x \notin \text{Im} [V \rightarrow U \rightarrow X]$ .

Sin embargo,  $\mathcal{A}$  es una gavilla edificable, puesto que podemos elegir  $X_1$  como cualquier abierto denso que no contenga a  $x$ ,  $X_2$  como un abierto denso de  $X - X_1$  que no contenga a  $x$ , etcétera. Con esta elección, la restricción de  $\mathcal{A}$  a los subesquemas  $X_i$  resultará localmente constante. Observe que el proceso es finito, pues  $\dim X_{i+1} < \dim X_i$ .

## 8.7. Gavillas $l$ -ádicas.

Considere ahora una familia  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \Lambda}$  de gavillas (digamos de grupos abelianos) edificables, con  $\Lambda$  algún conjunto de índices. Diremos que esta familia forma un *sistema inverso* si

- a)  $\Lambda$  es un conjunto dirigido,
- b) siempre que  $m > n$ , existe un morfismo de gavillas edificables  $\nu_{mn} : \mathcal{U}_m \rightarrow \mathcal{U}_n$  y
- c) Si  $m > n > k$ ,  $\nu_{mk} = \nu_{nk} \circ \nu_{mn}$ , es decir, los morfismos  $\nu_{mn}$  son compatibles con el orden parcial.

Dado un sistema inverso de gavillas edificables, tiene sentido considerar el límite inverso del sistema, que existe en toda categoría abeliana y que en el caso de grupos abelianos o anillos puede describirse de manera explícita como

$$\varprojlim_n \mathcal{U}_n = \{(u_n) \mid u_n \in \mathcal{U}_n \text{ y } \nu_{mn}(u_m) = u_n \ \forall m, n\}.$$

**Ejemplo 8.7.1.** *Considere al sistema inverso de gavillas constantes*

$$(\mathbb{Z}/l^{n+1}\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}},$$

la gavilla límite se denotará, por analogía con el caso de grupos profinitos, como  $\mathbb{Z}_l$ , y corresponde de hecho a la gavilla asociada a la pregavilla constante definida mediante el grupo abeliano  $\mathbb{Z}_l$ .

**Observación 8.7.2.** *Si se tiene una sucesión exacta de sistemas inversos de gavillas edificables*

$$0 \rightarrow (A_n) \rightarrow (B_n) \rightarrow (C_n) \rightarrow 0,$$

es decir, para cada  $n$  fijo se tiene una sucesión exacta de gavillas edificables, entonces al pasar al límite inverso se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow (A_n) \rightarrow (B_n) \rightarrow (C_n).$$

Observe que la sucesión anterior es sólo exacta por la izquierda, en general no será exacta por la derecha, como lo prueba el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 8.7.3.** *Consideré la sucesión exacta de sistemas inversos*

$$0 \rightarrow (l^n\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

al pasar al límite tendremos la sucesión

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p,$$

que evidentemente no es suprayectiva.

**Definición.** Sea  $(\mathcal{F}_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , un sistema inverso de gavillas edificables. Diremos que la gavilla  $\varprojlim_n \mathcal{F}_n$  es una *gavilla  $l$ -ádica* si se cumplen

- a)  $u_{n+1} : \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_n$  es suprayectiva para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,
- b)  $l^{n+1}\mathcal{F}_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y
- c)  $\mathcal{F}_{n+1}/l^{n+1}\mathcal{F}_{n+1} \cong \mathcal{F}_n$ .

La gavilla  $\mathbb{Z}_l$  es, por supuesto, una gavilla  $l$ -ádica.

Otro ejemplo de gavilla  $l$ -ádica es la gavilla  $\mu_l := \varprojlim \mu_{l^n}$ .

Estos son los dos ejemplos que mas nos interesarán en lo que sigue.

## 8.8. Fibras de una gavilla

En esta sección simplemente introducimos el concepto de la fibra de una gavilla y vemos algunas aplicaciones elementales del mismo.

**Definición.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla y  $X$  un esquema. Un *punto* en  $X_{\text{ét}}$  es un morfismo étale  $x : \text{Spec } k \rightarrow X$ .

Si  $x$  es un punto que corresponde a un campo separablemente cerrado, definimos la

fibra de  $\mathcal{F}$  en  $x$  como  $\mathcal{F}_x := \varprojlim_V \mathcal{F}(V)$ , donde el límite se toma sobre todos los esquemas étales  $V$  sobre  $X$  para los cuales se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \nearrow v & \downarrow \text{ét} \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

Observe que, por definición, la imagen de  $x$  es un punto  $y \in X$  tal que  $\mathcal{O}_y/\mathfrak{M}_y = k(y) \subset k$  es una extensión separable (en particular  $\mathfrak{M}_y \cdot \mathcal{O}_{(0)} = (0) = \mathfrak{M}_{(0)} \subset k$ ). Si  $v \in V$  es un punto en la fibra de  $y$ , entonces  $\mathfrak{M}_y \mathcal{O}_v = \mathfrak{M}_v$  y  $k(y) \subset k(v)$  es una extensión separable pues  $V \rightarrow X$  es plano y no ramificado. En particular, si  $k$  es la cerradura separable de  $k(y)$  se tiene  $k(y) \subset k(v) \subset k$  y cada extensión es separable, por tanto para cada  $v \in V_y$  se tiene un morfismo étale  $v : \text{Spec } k \rightarrow V_y \subset V$ .

En general, si  $x \in X$  corresponde a un campo  $k$ , definimos la fibra  $\mathcal{F}_x := \mathcal{F}_{\hat{x}}$ , donde  $\hat{x}$  es el morfismo correspondiente a la cerradura separable de  $k$ .

Esto generaliza de manera natural la definición de fibra en el sitio de Zariski, donde el límite se toma sobre todos los abiertos  $V$  de  $X$  que contienen a la imagen de  $x$ .

**Ejemplo 8.8.1.** *Si  $\mathcal{F}$  es una gavilla constante, entonces la fibra de cualquier punto será igual al grupo  $\mathcal{F}(U)$  donde  $U$  es algún esquema irreducible y étale sobre  $X$ , es decir, coincidirá con el grupo que define a la gavilla constante  $\mathcal{F}$ .*

**Ejemplo 8.8.2.** *Si  $\mathcal{F}$  es una gavilla rascacielos con grupo  $K$  y base  $p$ , entonces la fibra en todo punto que no esté sobre  $p$  será cero, en tanto que la fibra en cualquier punto sobre  $p$  será  $K$ .*

Una de las mayores aplicaciones de esta definición es el siguiente lema, que se deja como ejercicio al lector.

**Lema 8.8.3.** *Una sucesión de gavillas étale es exacta si y sólo si la sucesión de sus respectivas fibras es exacta para cada punto  $p$  de  $X$ .*



# Capítulo 9

## Descenso fielmente plano.

Recuerde que si  $B$  es una  $A$ -álgebra fielmente plana, entonces la sucesión

$$A \longrightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B$$

es una sucesión exacta.

Esta propiedad se puede generalizar como sigue

**Lema 9.0.1.** *Sean  $A$  un álgebra,  $B$  una  $A$ -álgebra que es fielmente plana como  $A$ -módulo y  $M$  un  $B$ -módulo. Puesto que  $B \otimes_A B$  tiene dos estructuras naturales de  $B$ -álgebra, definidas por sendos morfismos  $b \mapsto b \otimes 1$  y  $b \mapsto 1 \otimes b$ ,  $M$  se puede extender a un  $B \otimes_A B$ -módulo de dos maneras distintas y se tiene por tanto una sucesión exacta de  $A$ -módulos*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} M \otimes_B (B \otimes_A B),$$

donde  $N = \text{Ker}(\psi_1 - \psi_2)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Comencemos por observar que las dos estructuras de  $B$ -álgebra que tiene  $B \otimes_A B$  definen una única estructura de  $A$ -álgebra en  $B \otimes_A B$ , pues  $a \otimes 1 = 1 \otimes a$  para todo  $a \in A$ ; de este modo las dos estructuras de  $B$ -módulo con que hemos dotado a  $M \otimes_B (B \otimes_A B)$  definen una única estructura de  $A$ -módulo en  $M \otimes_B (B \otimes_A B)$ ; en particular  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  y  $\psi_1 - \psi_2$  son morfismos de  $A$ -módulos entre  $M$  y  $M \otimes_B (B \otimes_A B)$ , por tanto  $N$  está bien definido y es un  $A$ -submódulo de  $M$ .  $\diamond$

**Corolario 9.0.2.** *Si  $N$  y  $M$  son como en el lema precedente, entonces  $N \otimes_A B \cong M$  como  $B$ -módulos.*

**DEMOSTRACIÓN.** En efecto, por construcción de  $N$ , la sucesión

$$N \longrightarrow M \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} M \otimes_B (B \otimes_A B),$$

es exacta. Pero  $M \otimes_B (B \otimes_A B) \cong M \otimes_A B$  y, dado que  $B$  es un  $A$ -módulo fielmente plano, la sucesión anterior es exacta si y sólo si la sucesión

$$(9.0.1) \quad 0 \longrightarrow N \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} (M \otimes_A B) \otimes_A B,$$

es exacta, pero  $B \otimes_A B \cong B \oplus C$  para algún  $B$ -módulo  $C$  y en este caso ya sabemos que el ecualizador de

$$M \otimes_A B \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} M \otimes_A (B \oplus C)$$

es precisamente  $M$ , lo que en virtud de la exactitud de 9.0.1 demuestra que

$$N \otimes_A B \cong M$$

como  $B$ -módulo. ◇

**Corolario 9.0.3.** *Dados  $S = \text{Spec } A$ ,  $S' = \text{Spec } B$  dos esquemas afines, un morfismo fielmente plano (i.e., plano y suprayectivo)  $f : S' \rightarrow S$ , una gavilla casi coherente  $\widetilde{M}$  sobre  $S'$  y un isomorfismo de  $\mathcal{O}_{S' \times_S S'}$ -módulos  $\psi : \pi_1^* \widetilde{M} \rightarrow \pi_2^* \widetilde{M}$ ; entonces existe una gavilla casi coherente  $\widetilde{N}$  sobre  $S$  tal que  $\widetilde{M} \cong f^*(\widetilde{N})$ .*

**Corolario 9.0.4.** *Dados un esquema afín  $S = \text{Spec } A$ , un morfismo fielmente plano  $f : S' \rightarrow S$ , una gavilla casi coherente  $\mathcal{F}$  sobre  $S'$  y un isomorfismo*

$$\psi : \pi_1^* \mathcal{F} \rightarrow \pi_2^* \mathcal{F}$$

de  $\mathcal{O}_{S' \times_S S'}$ -módulos; entonces existe una gavilla casi coherente  $\widetilde{N}$  sobre  $S$  tal que

$$\mathcal{F} \cong f^*(\widetilde{N}).$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $\{U_\alpha = \text{Spec } B_\alpha \hookrightarrow S'\}$  es una cubierta de Zariski afín de  $S'$ , entonces  $S' \times_S S' = \cup_{\alpha, \beta} U_\alpha \times_S U_\beta$  y se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(S') & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \mathcal{F}_{\text{ét}}(S' \times_S S') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\alpha} \mathcal{F}(U_\alpha) & \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1^*} \\ \xrightarrow{p_2^*} \end{array} & \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{F}_{\text{ét}}(U_\alpha \times_S U_\beta) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) & & \end{array}$$

donde la flecha diagonal está inducida por el morfismo natural  $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U_\alpha \times_S U_\beta$ .

Pero  $U = \text{Spec } \oplus_{\alpha} B_{\alpha} \cong \sqcup_{\alpha} U_{\alpha} \rightarrow S$  es un cubriente afín fielmente plano de  $S$  (porque las inclusiones abiertas son morfismos planos y la composición de morfismos planos es plano) y

$$U \times_S U \cong \text{Spec } ((\oplus_{\alpha} B_{\alpha}) \otimes_A (\oplus_{\alpha} B_{\alpha})) \cong \sqcup_{\alpha, \beta} U_{\alpha} \times_S U_{\beta}$$

de modo que el diagrama conmutativo precedente se puede escribir como

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}(S') & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^*} \\ \xrightarrow{\pi_2^*} \end{array} & \mathcal{F}_{\acute{e}t}(S' \times_S S') \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow & & \downarrow \\
 N & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\acute{e}t}(U) & \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1^*} \\ \xrightarrow{p_2^*} \end{array} & \mathcal{F}_{\acute{e}t}(U \times_S U) \\
 & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) & & 
 \end{array}$$

donde  $N$  es el ecualizador de  $p_1^*$  y  $p_2^*$ , que es un  $A$ -módulo por el corolario previo.

Dado que el triángulo inferior del citado diagrama conmuta,  $N$  está contenido en el ecualizador de  $\mathcal{F}_{\acute{e}t}(U) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ , de modo que se tiene un morfismo bien

definido  $\varphi : N \rightarrow \mathcal{F}(S')$  y la gavilla  $\tilde{N}$  sobre  $S$  es la gavilla buscada.  $\diamond$

**Corolario 9.0.5.** *Si  $f : S' \rightarrow S$  es un morfismo fielmente plano,  $\mathcal{F}$  una gavilla casi coherente sobre  $S'$  y  $\psi : \pi_1^* \mathcal{F} \rightarrow \pi_2^* \mathcal{F}$  es un isomorfismo de  $\mathcal{O}_{S' \times_S S'}$ -módulos, entonces existe una gavilla casi coherente  $\mathcal{G}$  sobre  $S$  tal que  $\mathcal{F} \cong f^*(\mathcal{G})$ .*

**Observación 9.0.6.** *Observe que si el  $B$ -módulo  $M$  en el lema 9.0.1 es una  $B$ -álgebra, entonces  $M \otimes_B (B \otimes_A B)$  resulta una  $B \times_A B$ -álgebra y por tanto  $N$  es una  $A$ -álgebra, en particular, en el corolario 9.0.2, el isomorfismo resultante es un isomorfismo de  $B$ -álgebras y no sólo de  $B$ -módulos. De este modo tenemos:*

**Corolario 9.0.7.** *Si  $f : S' \rightarrow S$  es un morfismo fielmente plano,  $\mathcal{F}$  es una gavilla de  $\mathcal{O}_{S'}$ -álgebras y  $\psi : \pi_1^* \mathcal{F} \rightarrow \pi_2^* \mathcal{F}$  es un isomorfismo de  $\mathcal{O}_{S' \times_S S'}$ -álgebras, entonces existe una gavilla  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{O}_S$ -álgebras tal que  $\mathcal{F} \cong f^*(\mathcal{G})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Análogo al caso de  $\mathcal{O}_{S'}$ -módulos casi coherentes, *mutatis mutandis*.  $\diamond$

**Proposición 9.0.8.** *(Descenso fielmente plano de esquemas afines) Sean  $f : T' \rightarrow T$  un morfismo fielmente plano,  $X = \text{Spec } \mathcal{F} \rightarrow T'$  un  $T'$ -esquema afín provisto de un isomorfismo  $\psi : \pi_1^* X \rightarrow \pi_2^* X$ , donde  $\pi_1, \pi_2 : T' \times_T T' \rightarrow T$  son las proyecciones canónicas; entonces si  $\mathcal{F}$  es una  $\mathcal{O}_{T'}$ -álgebra, existe un esquema afín  $Y \rightarrow T$  tal que*

$X \cong f^*T$ , i.e., el diagrama siguiente es cartesiano.

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1^* X & \xrightarrow{p_2} & X & \xrightarrow{g} & Y \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow & & \downarrow \\
 T' \times_T T' & \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} & T' & \xrightarrow{f} & T
 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario precedente,  $\mathcal{F} \cong f^*\mathcal{G}$  para alguna  $\mathcal{O}_T$ -álgebra  $\mathcal{G}$  y el esquema  $Y = \text{Spec } \mathcal{G}$  es el esquema buscado.  $\diamond$

**Observación 9.0.9.** En las circunstancias de la proposición precedente, el morfismo  $g$  es fielmente plano, puesto que  $f$  lo es; de modo que  $X \rightarrow Y$  es un cubriente fielmente plano y además  $X \times_Y X \cong \pi_1^* X \cong \pi_2^* X$ . De este modo, para toda gavilla  $\mathcal{H}$  en un sitio fielmente plano (v.g. en los sitios étale, fppf o fpqc) tendremos una sucesión exacta

$$(9.0.2) \quad \mathcal{H}(Y) \longrightarrow \mathcal{H}(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1^*} \\ \xrightarrow{p_2^*} \end{array} \mathcal{H}(X \times_Y X)$$

donde  $\mathcal{H}(Y)$  es el ecualizador de  $p_1^*$  y  $p_2^*$ .

**Lema 9.0.10.** Si  $T, T', X$  e  $Y$  son como en la proposición 9.0.8, entonces  $\text{Hom}_{Sh}(-, Y)$  es el haz cociente de  $\text{Hom}_{Sh}(-, X)$  por  $\text{Hom}_{Sh}(-, p_1^* X) \cong \text{Hom}_{Sh}(-, p_2^* X)$  en cualquier sitio fielmente plano.

DEMOSTRACIÓN. Por Yoneda,  $\mathcal{H}(T) \cong \text{Hom}_{Sh}(T, \mathcal{H})$  para toda gavilla  $\mathcal{H}$  en el sitio fielmente plano; de modo que la sucesión exacta (9.0.2) puede reescribirse como

$$\text{Hom}_{Sh}(Y, \mathcal{H}) \longrightarrow \text{Hom}_{Sh}(X, \mathcal{H}) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1^*} \\ \xrightarrow{p_2^*} \end{array} \text{Hom}_{Sh}(X \times_Y X, \mathcal{H}) \cong_{p_1^*} \text{Hom}_{Sh}(p_1^* X, \mathcal{H}) \cong_{p_2^*} \text{Hom}_{Sh}(p_2^* X, \mathcal{H})$$

De este modo, cualquier morfismo de  $X$  en una gavilla  $\mathcal{H}$  cuya “restricción” a  $p_1^* X$  vía  $p_1^*$  coincida con su restricción a  $p_2^* X$  vía  $p_2^*$ , se extiende a un morfismo de gavillas de  $Y$  en  $\mathcal{H}$ .  $\diamond$

# Capítulo 10

## Funtores derivados.

### 10.1. Funtores derivados.

En esta sección  $X$  será un esquema y consideraremos gavillas en un sitio plano  $X_\eta$ , es decir, todos los cubrientes serán cubrientes fielmente planos. Por abuso de lenguaje escribiremos simplemente  $X$  en lugar de  $X_\eta$  siempre que no haya necesidad de hacer explícito el sitio en el que se está trabajando.

Dado una gavilla  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, diremos que  $\mathcal{Q}$  es una gavilla  $\mathcal{O}_X$ -*inyectiva* si el funtor  $\text{hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{Q})$  es exacto, es decir, si para todo diagrama de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & , \\ & & \downarrow & \swarrow \hat{f} & & \\ & & \mathcal{Q} & & & \end{array}$$

existe un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\hat{f} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{Q}$  que extiende a  $f$ .

**Ejemplo 10.1.1.** *Considere la gavilla constante  $\mathbb{Z}$ . Una gavilla de grupos abelianos  $\mathcal{Q}$  será  $\mathbb{Z}$ -inyectiva si para todo  $d \in \mathbb{Z}$ , el monomorfismo  $\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}$ , dado por multiplicación por  $d$ , extiende a un morfismo  $\hat{d} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Q}$  que haga conmutar al diagrama*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow f & \swarrow \hat{d} & \\ & & \mathcal{Q} & & \end{array}$$

*es decir, si y sólo si  $\mathcal{Q}$  es  $d$  divisible para todo  $d \in \mathbb{Z}$ , por ejemplo las gavillas constantes  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  son gavillas  $\mathbb{Z}$ -inyectivas.*

**Ejemplo 10.1.2.** *De manera semejante,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  es  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  inyectivo.*

Por lo general, cuando sea claro del contexto quien es  $R$ , omitiremos mencionarlo y diremos simplemente una gavilla inyectiva.

Dada una gavilla  $\mathcal{F}$ , una *resolución* de  $\mathcal{F}$  es una sucesión exacta de gavillas

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow \cdots ,$$

que se suele denotar como  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow R^\bullet$ . Si las  $R_i$  son gavillas inyectivas diremos que tenemos una *resolución inyectiva* de  $\mathcal{F}$ .

**Ejemplo 10.1.3.**  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es una resolución inyectiva de  $\mathbb{Z}$ .

Los conceptos correspondientes también existen para módulos sobre un anillo y, mas generalmente, para objetos de una categoría abeliana.

**Lema 10.1.4.** Sean  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Q^\bullet$  una resolución inyectiva de  $\mathcal{F}$  y  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow R^\bullet$  una resolución arbitraria de  $\mathcal{F}$ ; entonces existe un morfismo de complejos  $f : R^\bullet \rightarrow Q^\bullet$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & R_{p-1} & \longrightarrow & R_p & \longrightarrow & R_{p+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{p-1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_{p-1} & \longrightarrow & Q_p & \longrightarrow & Q_{p+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción en  $p$ , partiendo las resoluciones en sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow S_{i-1} \rightarrow R_i \rightarrow S_i \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow T_{i-1} \rightarrow Q_i \rightarrow T_i \rightarrow 0,$$

donde  $S_{-1} = T_{-1} := \mathcal{F}$ .

El diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & S_0 \\ & & \downarrow & & \swarrow & & \\ & & Q_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & T_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

donde el primer renglón es exacto, induce un morfismo  $R_0 \rightarrow Q_0$  que extiende al morfismo  $\mathcal{F} \rightarrow Q_0$ , puesto que  $Q_0$  es inyectivo.

Como la imagen de  $\mathcal{F} \rightarrow R_0 \rightarrow Q_0 \rightarrow T_0 = \mathcal{F} \rightarrow Q_0 \rightarrow T_0$  es cero, entonces el morfismo  $R_0 \rightarrow Q_0 \rightarrow T_0$  induce un morfismo  $S_0 \rightarrow T_0$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & S_0 \\ & & \downarrow & & \swarrow & & \\ & & Q_0 & & & & \\ & & \downarrow & & \swarrow & & \\ & & T_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

el cual, compuesto con la inclusión  $T_0 \rightarrow Q_1$  nos da un morfismo  $S_0 \rightarrow Q_1$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & S_0 \\
 & & \downarrow & \searrow & \swarrow & & \swarrow \\
 & & Q_0 & & & & \\
 & & \downarrow & \swarrow & \swarrow & & \swarrow \\
 0 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & T_1 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

Repitiendo el argumento, pero considerando ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & S_0 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & S_1 \\
 & & \downarrow & \searrow & \swarrow & & \swarrow \\
 & & Q_1 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & T_1 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

donde el primer renglón es exacto, obtenemos un morfismo  $R_1 \rightarrow Q_1$  que hace conmutar el diagrama del enunciado. Prosiguiendo de esta forma se obtiene el morfismo deseado.  $\diamond$

**Definición.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla sobre  $X$  y  $F$  un funtor exacto izquierdo de la categoría de gavillas en  $X$  a una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ . Si existe una resolución inyectiva  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Q^\bullet$  de  $\mathcal{F}$ , la homología del complejo

$$0 \rightarrow F(\mathcal{F}) \rightarrow F(Q_0) \rightarrow F(Q_1) \rightarrow F(Q_2) \rightarrow \cdots,$$

define a los *funtores derivados derechos* de  $\mathcal{F}$  (también llamados *imágenes superiores derechas* de  $F$ ), es decir, definimos la  $q$ -ésima imagen superior (derecha) de  $\mathcal{F}$  ante  $F$  como

$$R^q F_*(\mathcal{F}) := \frac{\ker(F(Q_q) \rightarrow F(Q_{q+1}))}{\text{Im}(F(Q_{q-1}) \rightarrow F(Q_q))},$$

para  $q \geq 0$ .

Consideraremos ahora un caso particular de la definición general de la sección precedente. Todos los resultado pueden formularse para cualquier funtor entre dos categorías abelianas y sus funtores derivados, a condición de que la primera de estas categorías tenga suficientes inyectivos.

**Definición.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla sobre  $X$  y  $\Gamma$  el funtor de la categoría de gavillas sobre  $X$  a la categoría de grupos abelianos  $\mathcal{A}$ , dado por  $\Gamma(\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ ; a los funtores

derivados (derechos) de  $\Gamma$  los llamamos los *grupos de cohomología de  $X_\eta$  con coeficientes en  $\mathcal{F}$* , y se denotan mediante  $H_\eta^q(X, \mathcal{F})$  (o simplemente  $H^q(X, \mathcal{F})$  cuando no haya lugar a confusión) para  $q \geq 0$ .

**Observación 10.1.5.** *En virtud del último lema de la sección previa, la cohomología de una gavilla  $\mathcal{F}$  no depende de la resolución inyectiva elegida para calcularla, suponiendo que existe al menos una tal resolución.*

**Lema 10.1.6.** *Si  $Q$  es una gavilla inyectiva, entonces  $H^q(X, Q) = 0$  para todo  $q > 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Considere la resolución inyectiva  $0 \rightarrow Q \rightarrow Q \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  de  $Q$  y calcule la cohomología de  $Q$  a través de dicha resolución.  $\diamond$

**Lema 10.1.7.** (*Lema de la serpiente*) *Considere el siguiente diagrama conmutativo de (gavillas de) grupos abelianos:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & \xrightarrow{j'} & B' & \xrightarrow{k'} & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & & \end{array}$$

*Si las filas en este diagrama son exactas, entonces existe una sucesión exacta*

$$\text{Ker}(f) \longrightarrow \text{Ker}(g) \longrightarrow \text{Ker}(h) \xrightarrow{\delta} \text{Coker}(f) \longrightarrow \text{Coker}(g) \longrightarrow \text{Coker}(h)$$

*Además, si  $A' \rightarrow B'$  es un monomorfismo, entonces  $\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Ker}(g)$  también lo es y si  $B \rightarrow C$  es un epimorfismo, entonces  $\text{Coker}(g) \rightarrow \text{Coker}(h)$  también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Completamos el diagrama con los correspondientes núcleos y conúcleos

$$(10.1.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \text{Ker}(f) & & \text{Ker}(g) & & \text{Ker}(h) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A' & \xrightarrow{j'} & B' & \xrightarrow{k'} & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & & \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow p & & \downarrow & & \\ & & \text{Coker}(f) & & \text{Coker}(g) & & \text{Coker}(h) & & \end{array}$$

Por la conmutatividad del diagrama, si  $a' \in \text{Ker}(f)$ , entonces  $g \circ j'(a') = j \circ f(a') = 0$ , es decir  $j'(a') \in \text{Ker}(g)$  y por tanto la restricción de  $j'$  al núcleo de  $f$  define un homomorfismo entre  $\text{Ker}(f)$  y  $\text{Ker}(g)$ , que seguiremos llamando  $j'$ ; de manera análoga, la restricción de  $k'$  al núcleo de  $g$  induce un homomorfismo entre  $\text{Ker}(g)$  y  $\text{Ker}(h)$ , que seguiremos llamando  $k'$ . La exactitud de la fila  $A' \xrightarrow{j'} B' \xrightarrow{k'} C' \longrightarrow 0$  induce exactitud en el diagrama

$$(10.1.2) \quad \text{Ker}(f) \longrightarrow \text{Ker}(g) \longrightarrow \text{Ker}(h)$$



Por otra parte, la conmutatividad del diagrama 10.1.1 implica que  $j(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(g)$ , de modo que  $j$  induce un homomorfismo  $\bar{j}$  entre  $\text{Coker}(f)$  y  $\text{Coker}(g)$  y análogamente  $k$  induce un homomorfismo  $\bar{k}$  entre  $\text{Coker}(g)$  y  $\text{Coker}(h)$ . Nuevamente, la exactitud de las filas en 10.1.1 induce exactitud en el diagrama

$$(10.1.3) \quad \text{Coker}(f) \longrightarrow \text{Coker}(g) \longrightarrow \text{Coker}(h)$$

Sea  $c \in \text{Ker}(h) \subset C'$ ; entonces, como  $k'$  es suprayectivo, existe  $b \in B'$  tal que  $k'(b) = c$  y por tanto  $0 = h(x) = h \circ k'(b) = k \circ g(b)$ , pues el diagrama conmuta, es decir  $g(b) \in \text{Ker}(k) = \text{Im}(j)$  por la exactitud de las filas en 10.1.1, así que existe  $a \in A$  tal que  $j(a) = g(b)$  y podemos definir  $\delta(c) := \pi(a) \in \text{Coker}(f)$ .

Veamos que  $\delta$  está bien definido, que es un homomorfismo y que la sucesión

$$\text{Ker}(f) \longrightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{k'} \text{Ker}(h) \xrightarrow{\delta} \text{Coker}(f) \xrightarrow{\bar{j}} \text{Coker}(g) \longrightarrow \text{Coker}(h)$$

es exacta.

- Si  $b_1 \in B'$  también satisface que  $k'(b_1) = c$ , entonces  $k'(b_1 - b) = c - c = 0$ , es decir  $b_1 - b \in \text{Ker}(k') = \text{Im}(j')$  por la exactitud de las filas en el diagrama 10.1.1, por tanto existe  $a' \in A'$  tal que  $j'(a') = b_1 - b$ , o sea  $b_1 = b + j'(a')$ ; de modo que

$$g(b_1) = g(b) + g \circ j'(a') = g(b) + j \circ f(a') = j(a) + j \circ f(a') = j(a + f(a'))$$

por la conmutatividad del diagrama; pero  $\pi(a + f(a')) = \pi(a) = \delta(c)$  por la definición de conúcleo, luego  $\delta$  está bien definido.

- Sean  $c' \in \text{Ker}(h)$ ,  $b' \in B'$  tal que  $k'(b') = c'$ ,  $a' \in A$  tal que  $j(a') = g(b')$  y  $\lambda \in R$ ; entonces

$$k'(b + \lambda b') = k'(b) + \lambda k'(b') = c + \lambda c'$$

y

$$j(a + \lambda a') = j(a) + \lambda j(a') = g(b) + \lambda g(b') = g(b + \lambda b')$$

puesto que  $k'$ ,  $g$  y  $j$  son homomorfismos de  $R$ -módulos; pero entonces

$$\delta(c + \lambda c') = \pi(a + \lambda a') = \pi(a) + \lambda \pi(a') = \delta(c) + \lambda \delta(c')$$

es decir,  $\delta$  es un homomorfismo de  $R$ -módulos.

- Finalmente, en vista de la exactitud de los diagramas 10.1.2 y 10.1.3, sólo necesitamos verificar que  $\text{Ker}(\delta) = \text{Im}(k'|_{\text{Ker}(g)})$  y  $\text{Ker}(\bar{j}) = \text{Im}(\delta)$ . En efecto, las inclusiones  $\text{Im}(k'|_{\text{Ker}(g)}) \subset \text{Ker}(\delta)$  e  $\text{Im}(\delta) \subset \text{Ker}(\bar{j})$  son sencillas y se dejan como ejercicio al lector. Veamos las inclusiones recíprocas:

$c \in \text{Ker}(\delta)$  si y sólo si  $\pi(a) = 0$ , si y sólo si existe  $a' \in A'$  tal que  $a = f(a')$  y como el diagrama 10.1.1 conmuta,  $b = j(a) = j \circ f(a') = g \circ j'(a')$ ; pero  $b = g(b')$ , por tanto  $b' - j'(a') \in \text{Ker}(g)$  y además  $k'(b' - j'(a')) = k'(b) - k' \circ j'(a') = k'(b) = c$  por la exactitud de las filas, es decir,  $c \in \text{Im}(k'|_{\text{Ker}(g)})$ , como queríamos demostrar.

Análogamente, si  $\pi(a) \in \text{Ker}(\bar{j})$ , entonces  $0 = \bar{j}(\pi(a)) = p \circ j(a)$ , es decir  $b := j(a) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(g)$ , de modo que existe  $b' \in B'$  tal que  $g(b') = b$ ; pero entonces  $h \circ k'(b') = k \circ g(b') = k(b) = k \circ j(a) = 0$ , o si se prefiere  $c := k'(b') \in \text{Ker}(h)$  y por construcción se tiene que  $\delta(c) = a$ .

Las afirmaciones sobre inyectividad y suprayectividad de los homomorfismos  $j'|_{\text{Ker}(f)}$  y  $\bar{k}$  respectivamente son inmediatas.  $\diamond$

**Corolario 10.1.8.** Si  $0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta corta en  $C^*(\mathcal{A})$ , con  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana, entonces se tiene una sucesión exacta larga

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_i(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_i(B^\bullet) \xrightarrow{g_*} H_i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} \dots$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo entero  $i$  se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & B^{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & C^{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & d'_{i-1} \downarrow & & d_{i-1} \downarrow & & d''_{i-1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^i & \xrightarrow{f_i} & B^i & \xrightarrow{g_i} & C^i & \longrightarrow & 0 \\ & & d'_i \downarrow & & d_i \downarrow & & d''_i \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & B^{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & C^{i+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como  $d'_{i+1} \circ d'_i = d_{i+1} \circ d_i = d''_{i+1} \circ d''_i = 0$ , el diagrama precedente induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{A^i}{\text{Im}(d'_{i-1})} & \xrightarrow{\bar{f}_i} & \frac{B^i}{\text{Im}(d_{i-1})} & \xrightarrow{\bar{g}_i} & \frac{C^i}{\text{Im}(d''_{i-1})} & \longrightarrow & 0 \\ & & \bar{d}_i \downarrow & & \bar{d}_i \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(d'_{i+1}) & \xrightarrow{f_{i+1}} & \text{Ker}(d_{i+1}) & \xrightarrow{g_{i+1}} & \text{Ker}(d''_{i+1}) \end{array}$$

y por el lema de la serpiente (10.1.7), para cada entero  $i$  tenemos una sucesión exacta

$$H_i(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_i(B^\bullet) \xrightarrow{g_*} H_i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_{i+1}(B^\bullet) \xrightarrow{g_*} H_{i+1}(C^\bullet)$$

puesto que  $\text{Im}(\bar{d}_i) = \text{Im}(d_i)$  y  $\text{Coker}(\bar{d}_i) = H_i(B^\bullet)$ , así como las correspondientes afirmaciones para  $d'_i$  y  $d''_i$ . Uniendo los diagramas para  $i \in \mathbb{Z}$  se tiene la sucesión exacta larga deseada.  $\diamond$

**Lema 10.1.9.** *Si la categoría  $\mathcal{Sh}$  de gavillas de grupos abelianos sobre  $X$  tiene suficientes inyectivos y se tiene un diagrama de gavillas*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & & & \downarrow k \\ & & I & & & & K \end{array}$$

donde el primer renglón es exacto y los morfismos verticales son monomorfismos en objetos inyectivos, entonces existen un objeto inyectivo  $J$ , un monomorfismo  $j : B \rightarrow J$  y morfismos  $q : I \rightarrow J$  y  $p : J \rightarrow K$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{q} & J & \xrightarrow{p} & K \longrightarrow 0 \end{array}$$

conmuta y sus renglones son exactos.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $I$  es inyectivo y  $\alpha$  es un monomorfismo, entonces existe  $\tilde{i} : B \rightarrow I$  tal que el diagrama  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$  conmuta. Hagamos  $J := I \oplus K$ ,

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & & \swarrow \tilde{i} \\ & & I \\ & \downarrow i & \\ & & \end{array}$$

$j = \tilde{i} + k \circ \beta$ ,  $q$  la inclusión natural de  $I$  en  $I \oplus K$  y  $p$  la proyección natural de  $I \oplus K$  en  $K$ .

**Corolario 10.1.10.** *Si  $\mathcal{Sh}$  tiene suficientes inyectivos y*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en  $\mathcal{A}$ , entonces existen sendas resoluciones inyectivas  $I^\bullet, J^\bullet$  y  $K^\bullet$  de  $A, B$  y  $C$  tales que

$$0 \rightarrow I^\bullet \rightarrow J^\bullet \rightarrow K^\bullet \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en  $C^*(\mathcal{A})$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $I^\bullet$  y  $K^\bullet$  sendas resoluciones inyectivas de  $A$  y  $C$ ; por el lema precedente podemos construir  $J^0 = I^0 \oplus K^0$  y un monomorfismo  $j : B \rightarrow J^0$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k \\ 0 & \longrightarrow & I^0 & \xrightarrow{q} & J^0 & \xrightarrow{p} & K^0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

conmuta y sus renglones son exactos. Tomando conúcleos se tiene un diagrama exacto y conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k \\ 0 & \longrightarrow & I^0 & \xrightarrow{q} & J^0 & \xrightarrow{p} & K^0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Repetiendo el proceso se tiene lo deseado.  $\diamond$

**Lema 10.1.11.** *Para todo funtor covariante exacto izquierdo  $F : \mathcal{S}h \rightarrow \mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}$  es una categoría abeliana y para toda sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

*en  $\mathcal{S}h$ , se tiene una sucesión exacta larga de funtores derivados*

$$\dots \rightarrow R^i F(A) \rightarrow R^i F(B) \rightarrow R^i F(C) \rightarrow R^{i+1} F(A) \rightarrow \dots$$

*si la categoría  $\mathcal{S}h$  tiene suficientes inyectivos.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el corolario 10.1.10, existen sendas resoluciones inyectivas  $I^\bullet$ ,  $J^\bullet$  y  $K^\bullet$  de  $A$ ,  $B$  y  $C$  tales que

$$0 \rightarrow I^\bullet \rightarrow J^\bullet \rightarrow K^\bullet \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en  $C^*(\mathcal{A})$ . Como  $F$  es exacto izquierdo e  $I^\bullet$  es inyectivo, entonces la sucesión  $0 \rightarrow F(I^n) \rightarrow F(J^n) \rightarrow F(K^n) \rightarrow 0$  es exacta para todo  $n$ , es decir,

$$0 \rightarrow F(I^\bullet) \rightarrow F(J^\bullet) \rightarrow F(K^\bullet) \rightarrow 0$$

es exacta y la afirmación del lema se sigue del corolario 10.1.8.  $\diamond$

**Proposición 10.1.12.** *Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla y suponga que  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow J^\bullet$  es una resolución de  $\mathcal{F}$ . Si  $H^q(X, J_i) = 0$  para todo  $q > 0$  (es decir, si las gavillas  $J_k$  son acíclicas) entonces podemos usar esta resolución para calcular la cohomología de  $\mathcal{F}$ , i.e.,  $H^q(X, \mathcal{F}) \cong \frac{\ker[J_q(X) \rightarrow J_{q+1}]}{\text{Im}[J_{q-1}(X) \rightarrow J_q]}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en la longitud de la resolución (aceptemos sin demostración que todo modulo finitamente generado admite una resolución de longitud finita).

I) Si la resolución es de longitud cero, entonces tenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow J \rightarrow 0$$

y por tanto  $\mathcal{F} \cong J$  es acíclica, es decir, los grupos de cohomología de  $\mathcal{F}$  son cero, al igual que la homología del complejo.

II) En general, considere el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & J_0 & \longrightarrow & J_1 & \longrightarrow & J_2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
 & & & & & & R_0 & & R_1 & & R_2 \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

La sucesión exacta corta  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow J_0 \rightarrow R_0 \rightarrow 0$  induce una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \rightarrow H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, J_0) \rightarrow H^q(X, R_0) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

Pero  $J_0$  es acíclico, por tanto se tienen isomorfismos

$$H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \cong H^q(X, R_0) \text{ para todo } q \geq 1.$$

Por inducción, dado que  $0 \rightarrow R_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \cdots$  es una resolución acíclica de  $R_0$  con longitud menor que la resolución original de  $\mathcal{F}$ , tenemos que  $H^q(X, R_0) \cong \frac{\ker[J_{q+1}(X) \rightarrow J_{q+2}]}{\text{Im}[J_q(X) \rightarrow J_{q+1}]}$ , por lo que

$$H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \cong \frac{\ker[J_{q+1}(X) \rightarrow J_{q+2}]}{\text{Im}[J_q(X) \rightarrow J_{q+1}]}$$

para todo  $q \geq 1$ .

Por lo que toca a  $H^1(X, \mathcal{F})$ , considere el diagrama exacto y conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(X, J_0) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(X, R_0) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow d_0 & & \downarrow \\
 & & & & & & H^0(X, J_1) \\
 & & & & \swarrow d_1 & & \downarrow \beta \\
 \cdots & \longleftarrow & H^0(X, J_2) & \longleftarrow & H^0(X, R_1) & \longleftarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H^1(X, R_0) & & 
 \end{array}$$

Como el morfismo  $H^0(X, R_0) \rightarrow H^0(X, J_1)$  es inyectivo, es evidente que

$$\ker d_1 = \ker \beta = H^0(X, R_0)$$

e

$$\text{Im } d_0 = \text{Im } \alpha,$$

luego

$$\frac{\ker d_1}{\text{Im } d_0} = \frac{\ker \beta}{\text{Im } \alpha} = \frac{H^0(X, R_0)}{\text{Im } \alpha} = H^1(X, \mathcal{F}).$$

◇

## 10.2. Resolución de Godement.

Hasta aquí hemos necesitado suponer que la categoría  $\mathcal{S}h$  tiene suficientes inyectivos. Mostremos que en efecto tiene suficientes inyectivos, con lo que todo lo dicho en las dos secciones precedentes resultará aplicable a las gavillas étales. Supondremos únicamente que el lector está familiarizado con el hecho de que la categoría de grupos abelianos tiene suficientes inyectivos.

**Teorema 10.2.1.** *La categoría de gavillas étales de grupos abelianos tiene suficientes inyectivos, es decir, toda gavilla étale de grupos abelianos admite una resolución inyectiva*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente con demostrar que toda gavilla étale de grupos abelianos puede encajarse en una gavilla inyectiva de grupos abelianos, pues el cociente de dos grupos abelianos es abeliano.

Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla de grupos abelianos y sea  $x \in X$  un punto geométrico de  $X$ , es decir, existe un campo separable  $L$  y un encaje  $\text{Spec } L \rightarrow X$  cuya imagen es  $x$ . Sea  $\mathcal{F}_x$  la fibra de  $\mathcal{F}$  en  $x$  y sea  $Q_x$  un  $\mathbb{Z}$  módulo inyectivo tal que  $0 \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow Q_x$  sea exacto. Definamos a la gavilla

$$\mathbb{M} := \prod_{x \in X} Q_x.$$

Se tiene entonces un encaje de  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{M}$  inducido por los encajes naturales  $\mathcal{F} \rightarrow \prod \mathcal{F}_x$  y  $\prod \mathcal{F}_x \rightarrow \mathbb{M}$ .

Se deja como ejercicio sencillo al lector verificar que  $\mathbb{M}$  es una gavilla inyectiva.  $\diamond$

31/10/2019-5/11/2019





# Capítulo 11

## Cohomología de Čech.

La teoría general desarrollada en las secciones anteriores tiene un inconveniente: en general es muy difícil dar resoluciones inyectivas (o acíclicas) de una gavilla dada, por lo que calcular los grupos de cohomología en  $X_\eta$  para una gavilla dada puede ser sumamente complicado.

En esta sección definiremos un método que, en algunas ocasiones, permite calcular los grupos de cohomología étale a partir de conocer algunos cubrientes étales del esquema  $X$ . Siguiendo el espíritu de estas notas, las definiciones se harán para un sitio plano arbitrario  $X_\eta$  y sólo incluiremos la hipótesis de que los morfismos sean étales cuando sea estrictamente necesario. Como en las lecciones anteriores, omitiremos el subíndice  $\eta$  en la notación del sitio.

Sea  $\mathfrak{U} = \{U \rightarrow X\}$  un cubriente de  $X$  y sea  $\mathcal{F}$  una gavilla sobre  $X$ . Como en el sitio de Zariski, definimos aquí el  $p$ -ésimo grupo de Čech como

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U_X^{p+1})$$

donde  $(U_X^{p+1}) = U \times_X U \times_X \cdots \times_X U$  ( $p+1$  veces) es el producto fibrado en la categoría de esquemas sobre  $X$ .

Los grupos de Čech  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  forman un complejo

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

llamado el complejo de Čech de  $\mathcal{F}$  relativo a  $\mathfrak{U}$ , donde la diferencial del complejo

$$d_{p-1} : \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

está definida mediante la fórmula

$$d_{p-1}(x) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \hat{\pi}_j^*(x).$$

Aquí  $\hat{\pi}_j : U^{p+1} \rightarrow U^p$  es la proyección que se obtiene al omitir el  $j$ -ésimo factor y  $\hat{\pi}_j^* : \mathcal{F}(U^p) \rightarrow \mathcal{F}(U^{p+1})$  es el morfismo inducido por  $\hat{\pi}_j$ .

Se verifica facilmente que  $d_{p+1} \circ d_p = 0$ , de modo que en efecto tendremos un complejo.

**Definición.** Definimos el  $p$ -ésimo grupo de cohomología de Čech de  $\mathcal{F}$  relativo a  $\mathfrak{U}$  como el  $p$ -ésimo grupo de cohomología del complejo de Čech, es decir

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \frac{\ker d_p}{\operatorname{Im} d_{p-1}}.$$

**Definición.**  $\mathfrak{V}$  es un refinamiento de  $\mathfrak{U}$  si  $\mathfrak{V}$  es una cubierta de  $X$  y todo esquema de la cubierta  $\mathfrak{V}$  admite un morfismo (en  $X_\eta$ ) sobre algún esquema de la cubierta  $\mathfrak{U}$ . Si  $\mathfrak{V}$  es un refinamiento de  $\mathfrak{U}$  tendremos un morfismo  $\theta : \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \hat{H}^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ .

**Definición.** Definimos la cohomología de Čech de  $\mathcal{F}$  como

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \lim_{\vec{\mathfrak{U}}} \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Definamos ahora un complejo de gavillas de Čech:

Las componentes de este complejo son  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = f_* \mathcal{F}|_{U^{p+1}}$ , donde  $f : U^{p+1} \rightarrow X$  es el morfismo estructural, y la diferencial en el complejo se define como antes

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V) \xrightarrow{d_p} \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V)$$

$$x \longmapsto \sum_j (-1)^{j-1} \hat{\pi}_j^*(x)$$

Observe que  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(U^{p+1} \times_X U)$ , en particular

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(X) = \mathcal{F}(U^{p+1}) = \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

y el morfismo inducido en las secciones globales coincide con el morfismo del complejo de Čech.

Con esta notación podemos formular el siguiente lema:

**Lema 11.0.1.** *La sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_1} \dots$$

es exacta, donde  $\epsilon : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es la restricción natural  $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U \times_X V)$ ; es decir, el complejo  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es una resolución de  $\mathcal{F}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Como los morfismos están definidos globalmente, el complejo está bien definido y la exactitud del mismo es un asunto local, es decir, basta verificarla en las fibras.

Recuerde que si  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  son dos morfismos homótopos entre complejos de grupos abelianos, entonces los morfismos inducidos  $f_*, g_* : H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$  coinciden; en particular, si la identidad es homótopa al morfismo cero, entonces la cohomología del complejo  $A^\bullet$  es cero.

Mostraremos que el homomorfismo cero es homótopo a la identidad en los complejos

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x,$$

para toda  $x \in X$ ; es decir, construiremos un morfismo  $k_p : \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x \rightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$  tal que  $(d_{p-1} \circ k_p + k_{p+1} \circ d_p)(\alpha) = \alpha$  para todo  $\alpha$ . En efecto, dados  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$ , existe  $V \rightarrow X$  un morfismo étale que realiza a  $\alpha$ , es decir, tal que  $x \in \text{Im}(V \rightarrow X)$  y  $\alpha \in \Gamma(V, \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = \mathcal{F}(U^{p+1} \times_X V)$ .

Observe que, puesto que  $U \rightarrow X$  es un cubriente plano, entonces  $p_2 : U \times_X V \rightarrow V$  es también un cubriente plano, en particular  $x \in \text{Im}(U \times_X V \rightarrow V \rightarrow X)$  y  $\alpha$  admite un representante, que denotaremos mediante  $\hat{k}(\alpha)$ , en

$$\Gamma(U \times_X V, \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = f_* \mathcal{F}|_{U^p}(U \times_X V) = \mathcal{F}(U^p \times_X (U \times_X V)) = \mathcal{F}(U^{p+1} \times_X V)$$

Definamos  $k_p(\alpha) := \hat{k}_p(\alpha)_x \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$ . Un cálculo directo muestra que  $k$  satisface la identidad buscada, demostrando la exactitud del complejo y por tanto el lema.  $\diamond$

**Corolario 11.0.2.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla sobre  $X$ , entonces para todo  $q \geq 0$  existe un morfismo canónico

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}).$$

DEMOSTRACIÓN. Como el complejo  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es una resolución de  $\mathcal{F}$ , entonces para toda resolución inyectiva  $I^\bullet$  de  $\mathcal{F}$  se tiene un morfismo  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow I^\bullet$ , el cual induce un morfismo  $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$ . Si  $\mathfrak{V}$  es un refinamiento de  $\mathfrak{U}$  se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad} & H^p(X, \mathcal{F}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \check{H}^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) & \end{array}$$

el cual induce el morfismo buscado por la propiedad del límite directo.  $\diamond$



# Capítulo 12

## Teoremas de Comparación

### 12.1. Teoremas de comparación I.

En la lección precedente hemos definido la cohomología de una gavilla vía funtores derivados, así como la cohomología de Čech de una gavilla; también hemos visto que existe un morfismo natural entre la cohomología de Čech de una gavilla y la cohomología de la misma como funtor derivado. En este capítulo nos proponemos comparar estas cohomologías entre sí, así como con otras cohomologías, como la de Zariski y la analítica, cuando esto tenga sentido. En esta lección  $X_\eta$  será el sitio étale pequeño  $X_{\text{ét}}$  (la mayor parte de lo que se diga aquí tiene sentido también en el sitio de Nisnevich, aunque aún no hemos hablado de él).

### 12.2. Definición de $j_!$ para las topologías de Zariski y étale.

Uno de los primeros resultados esperables para la cohomología de Čech, si ésta ha de coincidir con la cohomología étale para algunas gavillas razonables, es que las gavillas inyectivas sean acíclicas para la cohomología de Čech. Para esto necesitamos definir el funtor  $j_!$ .

Recordemos que si  $X$  un esquema y  $U \xrightarrow{j} X$  es un abierto de Zariski de  $X$ , cualquier gavilla de Zariski  $\mathcal{F}$  sobre  $U$  define un funtor en  $X_{\text{Zar}}$  mediante la fórmula

$$V \longmapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{si } V \subset U \\ 0 & \text{si } V \not\subset U \end{cases}$$

La gavilla asociada a este funtor se denota como  $j_!\mathcal{F}$  y la conocemos como la gavilla que se obtiene al extender  $\mathcal{F}$  por cero fuera de  $U$ .

En el caso étale, la definición es ligeramente distinta. En primer lugar no nos interesa que  $V$  sea un subconjunto de  $U$  y no queremos reemplazar a  $V$  por  $U \times_X V$ , pues eso sería el análogo de  $U \cap V$ , que no es el caso para el funtor  $j_!$  en el sitio de Zariski. Una primera posibilidad sería fijarnos en la inclusión de las imágenes, pero en realidad hay algo más preciso que fijarse en las imágenes:

Dados un esquema  $X$ , un cubriente étale  $U \xrightarrow{j} X$ , una gavilla  $\mathcal{F}$  sobre  $U$  y un morfismo étale  $V \rightarrow X$ ; considere el conjunto  $\Phi = \{\phi : V \rightarrow U \text{ étale}\}$  tales que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \swarrow & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Observe que si el conjunto  $\Phi$  no es vacío, entonces existe sólo un número finito de tales  $\phi$  pues la fibra de  $U \rightarrow X$  en cada punto es finita, en particular la fibra sobre el punto genérico de  $\text{Im}(V \rightarrow X)$ , suponiendo que  $X$  no es un conjunto finito.

**Definición.** Definimos la gavilla  $j_!\mathcal{F}$  en  $X_{\text{ét}}$  como la gavilla asociada al funtor

$$V \mapsto \bigoplus_{\phi \in \Phi} \mathcal{F}(V)$$

A esta gavilla la conocemos también, por analogía con el caso clásico, como la extensión de  $\mathcal{F}$  por cero “fuera de  $U$ ”.

**Observación 12.2.1.** La fibra de  $j_!\mathcal{F}$  en todo punto  $x$  que no está en la imagen de  $U \rightarrow X$  es cero.

**Lema 12.2.2.** Sean  $X, j$  y  $U$  como antes y sea  $\mathcal{G}$  una gavilla en  $X$ , entonces

$$\text{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(U).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $U \xrightarrow{j} X$  étale,  $\mathcal{G}$  una gavilla étale en  $X$  y  $\{U_i \rightarrow X\}$  una colección de morfismos étales tal que  $\{U_i\} \cup \{U\}$  sea una cubierta étale de  $X$  que satisface  $\text{Im } U_i \cap (X - \text{Im } U) \neq \emptyset$  para todo  $i$ . Sea  $\mathcal{F} := \mathcal{H}om(j_!\mathbb{Z}, \mathcal{G})$ , en particular  $\mathcal{F}(X) = \text{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathcal{G})$  y tenemos una sucesión exacta corta ( $\mathcal{F}$  es una gavilla)

$$\text{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{F}(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}(U_i) \oplus \cdots \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(U \times_X U) \oplus_i \mathcal{F}(U \times_X U_i) \oplus_i \mathcal{F}(U_i \times_X U) \oplus_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j)$$

Pero  $\text{Im } U_i \not\subset \text{Im } U$  para toda  $i$ , luego  $j_!\mathbb{Z}(U_i) = 0$  y por tanto  $\mathcal{F}(U_i) = 0$  para toda  $i$ . En cuanto a  $\mathcal{F}(U \times_X U_i)$ , y análogamente  $\mathcal{F}(U_i \times_X U)$ , las proyecciones sobre  $U$  y sobre  $U_i$  dan lugar a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & U \times_X U_i & \\ p_1 \swarrow & \downarrow & \searrow p_2 \\ U & \xrightarrow{j} & X \longleftarrow U_i \end{array}$$

el cual induce un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}(U \times_X U_i) & \\ p_1^* \nearrow & & \nwarrow p_2^* \\ \mathcal{F}(U) & & \mathcal{F}(U_i) = 0 \end{array}$$

por lo que su ecualizador es cero, lo que nos deja solamente con la contribución procedente de

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \rightrightarrows \mathcal{F}(U \times_X U).$$

Ahora bien, si

$$\Phi = \{ \phi : U \rightarrow U \mid \begin{array}{ccc} & & U \\ & \phi \swarrow & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array} ; \text{conmuta} \}$$

se tiene un isomorfismo de esquemas

$$U \times \Phi \xrightarrow{\sigma} U \times_X U,$$

$$(x, \phi) \longmapsto (x, \phi(x))$$

por tanto  $\mathcal{F}(U \times_X U) \xrightarrow{\sigma} \oplus_{\Phi} \mathcal{F}(U)$ .

Puesto que  $p_1 \circ \sigma(x, \phi) = x$  y  $p_2 \circ \sigma(x, \phi) = \phi(x)$ , entonces para todo  $f \in \mathcal{F}(U)_{\phi}$  se tiene  $(p_1 \circ \sigma)^*(f) = \mathrm{id}_U^* f = f$  en tanto que  $(p_2 \circ \sigma)^*(f) = \phi^*(f)$ ; así que para todo  $f \in \mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}, \mathcal{G})$  se satisface que  $f = \phi^*(f)$  para todo  $\phi \in \Phi$ .

Más aún, dado que  $j_! \mathbb{Z}(U) = \oplus_{\Phi} \mathbb{Z}$ , entonces

$$\mathcal{F}(U) := \mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}, \mathcal{G})(U) = \{ f : \oplus_{\Phi} \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{G}(U) \}$$

y cada elemento  $\psi \in \Phi$  induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{\Phi} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G}(U) \\ \psi^* \downarrow & & \downarrow \psi^* \\ \oplus_{\Phi} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

para cada  $f \in \mathcal{F}(U)$ .

Observe que  $\psi^*(1_{\phi}) = 1_{\psi \circ \phi}$ , por lo tanto  $\psi^*(f(1_{\phi})) = f(\psi^*(1_{\phi})) = f(1_{\psi \circ \phi})$ , de modo que la condición  $f = \psi^* f : \oplus_{\Phi} \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{G}(U)$  equivale a

$$f(1_{\phi}) = \psi^*(f(1_{\phi})) = f(1_{\psi \circ \phi})$$

En particular, con  $\phi = \mathrm{id}_U$  tenemos  $f(1_{\psi}) = f(1_{\mathrm{id}_U})$ , es decir, si  $f \in \mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}, \mathcal{G})$ , entonces  $f(1_{\mathrm{id}_U}) \in \mathcal{G}(U)$  determina a  $f$ , i.e.  $\mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}, \mathcal{G}) \subset \mathcal{G}(U)$ . Pero es evidente que si  $g \in \mathcal{G}(U)$  podemos definir  $f(1_{\mathrm{id}_U}) = g$  y esto define  $f \in \mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}, \mathcal{G})$ .  $\diamond$

**Teorema 12.2.3.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla inyectiva sobre un esquema  $X$ , entonces para toda cubierta étale  $\mathfrak{U} := \{U \rightarrow X\}$ , se tiene que  $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$  para toda  $k$ .

DEMOSTRACIÓN. *En efecto, estos grupos son cero si y sólo si la sucesión*

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}(U^p) \xrightarrow{d_{p-1}} \mathcal{F}(U^{p+1}) \xrightarrow{d_p} \mathcal{F}(U^{p+2}) \xrightarrow{d_{p+1}} \dots$$

*es exacta. Como  $\mathcal{F}(U^k) = \text{Hom}(j_! \mathbb{Z}_{U^k}, \mathcal{F})$ , esta sucesión será exacta si y sólo si la sucesión*

$$\dots \xleftarrow{\delta_{k-1}} j_! \mathbb{Z}_{U^k} \xleftarrow{\delta_k} j_! \mathbb{Z}_{U^{k+1}} \xleftarrow{\delta_{k+2}} j_! \mathbb{Z}_{U^{k+2}} \xleftarrow{\dots}$$

*es exacta, la cual será exacta si y sólo si las sucesiones de tallos son exactas para todo punto. Observe que los tallos de un funtor y los tallos de la gavilla asociada coinciden.*

*Ahora bien, con la notación del lema precedente, si  $V \rightarrow U$  es étale y denotamos por  $\Phi$  al conjunto de todas las transformaciones de  $V$  en  $V$  que forman un triángulo conmutativo*

(12.2.1)

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \phi \swarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X, \end{array}$$

*entonces  $j_! \mathbb{Z}_U(V) = \bigoplus_{\Phi} \mathbb{Z}$  y la propiedad universal de los diagramas cartesianos produce, para cada pareja  $\phi, \psi \in \Phi$ , un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc} V & & & & \\ \psi \searrow & & & & \\ & U \times_X U & \xrightarrow{p_2} & U & \\ \downarrow \phi & \downarrow p_1 & & \downarrow & \\ & U & \longrightarrow & X & \end{array}$$

*Recíprocamente, si  $\rho : V \rightarrow U \times_X U$  produce un triángulo conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \rho \swarrow & & \downarrow \\ U \times_X U & \longrightarrow & X, \end{array}$$

*entonces las composiciones  $p_i \circ \rho : V \rightarrow U$  producirán triángulos conmutativos como en 12.2.1, es decir  $p_1 \circ \rho, p_2 \circ \rho \in \Phi$ ; por tanto  $j_! \mathbb{Z}_{U^2}(V) = \bigoplus_{\Phi^2} \mathbb{Z}$ .*

*Es fácil ver, usando un argumento inductivo y la propiedad universal de los diagramas cartesianos, que para todo  $\phi \in \Phi$  y para todo  $\psi \in \Phi^k$  se tiene un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc} V & & & & \\ \psi \searrow & & & & \\ & U^{k+1} & \xrightarrow{p_2} & U^k & \\ \downarrow \phi & \downarrow p_1 & & \downarrow & \\ & U & \longrightarrow & X & \end{array}$$



de modo que  $j_! \mathbb{Z}_{U^k}(V) = \bigoplus_{\mathbb{P}^k} \mathbb{Z}$  para todo  $k$ . En particular, el tallo  $(j_! \mathbb{Z}_U)_x = \bigoplus_{\Lambda} \mathbb{Z}$  y los tallos  $(j_! \mathbb{Z}_{U^k})_x = \bigoplus_{\Lambda^k} \mathbb{Z}$  para todo  $k$ , donde  $\Lambda$  depende de  $x$ , por lo que el resultado buscado equivale a la exactitud del diagrama

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\Lambda^{k+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\Lambda^k} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\Lambda^{k-1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

de donde se concluye la exactitud de la sucesión original. ◇

Gracias a este lema, en la sección siguiente podremos dar condiciones bajo las cuales la cohomología de Čech de una gavilla étale en una variedad coincide con la cohomología étale de la gavilla en dicha variedad

14/11/2019

### 12.3. Teoremas de comparación II.

### 12.4. Teorema de Artin.

En esta sección veremos que, para la mayoría de las variedades usuales, la cohomología de Čech de una gavilla étale coincide con la cohomología étale de dicha gavilla. Comencemos por observar que  $\check{H}^0(\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{F})$  para toda gavilla  $\mathcal{F}$ , simplemente por la definición de ambos grupos de cohomología y procedamos a demostrar un caso particular, que ilustra la técnica general.

**Lema 12.4.1.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla étale en  $X$ , entonces  $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) = H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{F})$ .

DEMOSTRACIÓN. Recuerde que para toda cubierta étale  $\mathfrak{U} = \{V \rightarrow X\}$  de  $X$  se tiene un morfismo  $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$  y, por la propiedad universal del límite directo, estos morfismos inducen un morfismo  $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ . Por tanto sólo necesitamos producir el morfismo inverso  $H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ .

Observe que dado  $\bar{y} \in H^1(X, \mathcal{F})$ , es suficiente producir un representante de  $\bar{y}$  en  $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  para algún cubriente  $\mathfrak{U}$  de  $X$ , el cual induce por tanto el correspondiente elemento en el límite directo.

Como toda gavilla admite una resolución inyectiva, considere una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{Q} \xrightarrow{\beta} \mathcal{R} \longrightarrow 0$$

donde  $\mathcal{Q}$  es una gavilla inyectiva. Por ser  $\mathcal{Q}$  inyectiva, los grupos de cohomología  $H^i(W, \mathcal{Q})$  son cero para todo  $i \geq 1$  y para todo  $W \in X_{\text{ét}}$ , por lo que dado un cubriente étale  $\mathfrak{U} = \{\nu : V \rightarrow X\}$  de  $X$  tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{F}(V \times_X V) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{F}(V \times_X V \times_X V) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}(X) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathcal{Q}(V) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{Q}(V \times_X V) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{Q}(V \times_X V \times_X V) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}(X) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathcal{R}(V) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{R}(V \times_X V) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{R}(V \times_X V \times_X V) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \vartheta \downarrow & & \vartheta \downarrow & & \vartheta \downarrow & & \vartheta \downarrow & & \\
 & & H^1(X, \mathcal{F}) & & H^1(V, \mathcal{F}) & & H^1(V \times_X V, \mathcal{F}) & & H^1(V \times_X V \times_X V, \mathcal{F}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

donde las columnas son exactas.

Sea  $\bar{y} \in H^1(X, \mathcal{F})$ , como  $\partial$  es suprayectivo, existe  $y \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $\partial(y) = \bar{y}$ .

Puesto que la sucesión  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$  es exacta en fibras, refinando el cubriente en caso necesario, podemos suponer que el cubriente étale  $\mathfrak{U} := V \rightarrow X$  es de tal forma que  $\partial \circ \nu^*(y) = 0$ , pero entonces existe  $x \in \mathcal{Q}(V)$  tal que  $\beta(x) = \nu^*(y)$ . Para esta  $x$  se cumple la relación  $\beta \circ \delta_0(x) = \delta_0 \circ \beta(x) = \delta_0 \circ \nu^*(y) = 0$ , es decir,  $\delta_0(x) \in \text{Ker } \beta$ , por tanto existe  $z \in \mathcal{F}(V \times_X V)$  tal que  $\alpha(z) = \delta_0(x)$ , de donde  $\alpha \circ \delta_1(z) = \delta_1 \circ \alpha(z) = \delta_1 \circ \delta_0(x) = 0$ .

Como  $\alpha$  es inyectivo se concluye que  $z \in \text{ker } \delta_1$  y en consecuencia  $\bar{z} \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ .

Si  $y_1 \in \mathcal{R}(X)$  es otro levantamiento de  $\bar{y}$ , entonces  $\partial(y - y_1) = 0$  y la exactitud de las columnas del diagrama implican que existe  $w \in \mathcal{Q}(X)$  tal que  $\beta(w) = y - y_1$ . De la conmutatividad del diagrama y la exactitud de la segunda columna se sigue que

$$\partial \circ \nu^*(y - y_1) = \partial \circ \nu^* \circ \beta(w) = \partial \circ \beta \circ \nu^*(w) = 0$$

y como  $\partial \circ \nu^*(y) = 0$ , concluimos que necesariamente se tiene también  $\partial \circ \nu^*(y_1) = 0$ , por tanto existe  $x_1 \in \mathcal{Q}(V)$  tal que  $\nu^*(y_1) = \beta(x_1)$ . Pero en tal caso se tiene como antes  $\delta_0(x_1) = \alpha(z_1)$  para algún  $z \in \mathcal{F}(V \times_X V)$  y además

$$\beta(x - x_1) = \beta(x) - \beta(x_1) = \nu^*(y) - \nu^*(y_1) = \nu^*(y - y_1) = \nu^* \circ \beta(w) = \beta \circ \nu^*(w),$$

es decir  $\beta(x - x_1 - \nu^*(w)) = 0$  o, equivalentemente en virtud de la exactitud de las columnas del diagrama,  $x - x_1 - \nu^*(w) = \alpha(t)$  para algún  $t \in \mathcal{F}(V)$ ; de modo que, habida cuenta de que los renglones del diagrama forman un complejo,

$$\alpha(z) - \alpha(z_1) = \delta_0(x) - \delta_0(x_1) = \delta_0(x - x_1) = \delta_0(x - x_1 - \nu^*(w)) = \delta_0 \circ \alpha(t) = \alpha \circ \delta_0(t),$$

es decir,  $\alpha(z - z_1 - \delta_0(t)) = 0$ , pero  $\alpha$  es inyectivo, por tanto  $z = z_1 + \delta_0(t)$ , de modo que  $z$  y  $z_1$  inducen la misma clase  $\bar{z}$  en  $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , es decir,  $\bar{z}$  no depende de la elección del levantamiento y de  $\bar{y}$  por lo que el morfismo está bien definido.

Más aún, si  $\bar{z}(\bar{y}) = \bar{z}(\bar{y}_1)$ , entonces  $z(\bar{y}) = z(\bar{y}_1) + \delta_0(w)$  para algún  $w \in \mathcal{F}(V)$ , es decir

$$\begin{aligned} \delta_0(x) &= \alpha(z(\bar{y})) \\ &= \alpha(z(\bar{y}_1) + \alpha(\delta_0(w))) \\ &= \delta_0(x_1) + \delta_0(\alpha(w)) \\ (12.4.1) \quad &= \delta_0(x_1 + \alpha(w)) \end{aligned}$$

pero  $\text{Ker } \delta_0 = \text{Im } \nu^*$ , entonces  $x = x_1 + \alpha(w) + \nu^*(v)$  para algunos  $w \in \mathcal{F}(v)$ ,  $v \in \mathcal{Q}(X)$ .

De este modo,

$$\nu^*(y) = \beta(x) = \beta(x_1 + \alpha(w) + \nu^*(v)) = \beta(x_1) + \beta \circ \nu^*(v) = \nu^*(y_1) + \nu^* \circ \beta(v)$$

pues  $\beta \circ \alpha = 0$ . Como  $\nu^*$  es inyectivo, concluimos que  $y = y_1 + \beta(v)$ , de donde  $\bar{y} = d(y) = d(y_1) + d \circ \beta(v) = d(y_1) = \bar{y}_1$  pues  $d \circ \beta = 0$ . Esto demuestra que el

morfismo  $H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$  es inyectivo. La demostración de la suprayectividad se deja como ejercicio al lector.  $\diamond$

Podemos ahora enunciar el resultado principal de esta sección:

**Teorema 12.4.2.** *Sea  $X$  una variedad y suponga que  $X$  tiene la siguiente propiedad: Para toda cubierta étale  $\mathfrak{U} := V \rightarrow X$ , para todo natural  $k$  y para toda cubierta étale  $W \rightarrow V^k$ , existe una cubierta étale  $\mathfrak{V} := U \rightarrow X$  tal que  $U^k \rightarrow W$  existe y es una cubierta étale, donde  $V^k := V \times_X \cdots \times_X V$   $k$  veces. Entonces, para toda gavilla étale  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  se tiene*

$$\check{H}^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}).$$

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción en  $i$ . Si  $i = 0$ , el resultado es cierto por definición de  $H^0$  y  $\check{H}^0$ . Si  $i = 1$ , el resultado es cierto por el lema previo.

Sea  $i \geq 1$  y supongamos el teorema cierto para toda gavilla étale sobre  $X$  y para todo  $k \leq i$ . Como en el lema previo, considere una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{Q} \xrightarrow{\beta} \mathcal{R}$$

donde  $\mathcal{Q}$  es una gavilla inyectiva. Nuevamente tendremos  $H^k(X, \mathcal{R}) \cong H^{k+1}(X, \mathcal{F})$  para todo  $k \geq 1$  y, por hipótesis de inducción,  $H^k(X, \mathcal{R}) \cong \check{H}^k(X, \mathcal{R})$  para todo  $k \leq i$ , en particular tendremos  $H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{R}) \cong \check{H}^i(X, \mathcal{R})$ . Basta por tanto demostrar que  $\check{H}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^i(X, \mathcal{R})$ . Más aún, como  $\check{H}^i(X, \mathcal{R})$  es límite de los grupos  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{R})$ , donde  $\mathfrak{U}$  es una cubierta étale de  $X$ , y habida cuenta de que siempre se tiene un morfismo  $\check{H}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F})$ , basta demostrar que  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \hookrightarrow \check{H}^{i+1}(X, \mathcal{F})$ . Considere el diagrama siguiente, donde  $\mathfrak{U} := V \rightarrow X$  es un cubriente étale de  $X$ ,  $V^i := V \times_X \cdots \times_X V$   $i$  veces y las columnas son exactas.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{F}(V^i) & \xrightarrow{\delta_{i-1}} & \mathcal{F}(V^{i+1}) & \xrightarrow{\delta_i} & \mathcal{F}(V^{i+2}) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & \mathcal{F}(V^{i+3}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{Q}(V^i) & \xrightarrow{\delta_{i-1}} & \mathcal{Q}(V^{i+1}) & \xrightarrow{\delta_i} & \mathcal{Q}(V^{i+2}) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & \mathcal{Q}(V^{i+3}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}(V^i) & \xrightarrow{\delta_{i-1}} & \mathcal{R}(V^{i+1}) & \xrightarrow{\delta_i} & \mathcal{R}(V^{i+2}) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & \mathcal{R}(V^{i+3}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \\
 & & H^1(V^i, \mathcal{F}) & & H^1(V^{i+1}, \mathcal{F}) & & H^1(V^{i+2}, \mathcal{F}) & & H^1(V^{i+3}, \mathcal{F}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Sean  $\bar{y} \in \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{R})$  y  $W \rightarrow V^{i+1}$  un cubriente étale de  $V^{i+1}$  tal que

$$\bar{y} \in \text{Im}(Q(W) \rightarrow R(W))$$

(recuerde que la sucesión  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$  es exacta en fibras); entonces existe un cubriente étale  $\mathfrak{V} := U \rightarrow V$  de  $V$  tal que  $U^{i+1} \rightarrow W$  es un cubriente étale, en particular tendremos  $\bar{y} \in \text{Im}(Q(U^{i+1}) \rightarrow R(U^{i+1}))$  y  $R(V^{i+1}) \rightarrow R(U^{i+1})$ . Considere ahora el diagrama

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{\delta_{i-1}} & \mathcal{F}(U^{i+1}) & \xrightarrow{\delta_i} & \mathcal{F}(U^{i+2}) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & \mathcal{F}(U^{i+3}) & \longrightarrow \dots \\
 \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & \\
 \mathcal{Q}(W) & \xrightarrow{\delta_{i-1}} & \mathcal{Q}(U^{i+1}) & \xrightarrow{\delta_i} & \mathcal{Q}(U^{i+2}) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & \mathcal{Q}(U^{i+3}) & \longrightarrow \dots \\
 \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & \\
 \mathcal{R}(W) & \xrightarrow{\delta_{i-1}} & \mathcal{R}(U^{i+1}) & \xrightarrow{\delta_i} & \mathcal{R}(U^{i+2}) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & \mathcal{R}(U^{i+3}) & \longrightarrow \dots \\
 \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & \\
 H^1(W, \mathcal{F}) & & H^1(U^{i+1}, \mathcal{F}) & & H^1(U^{i+2}, \mathcal{F}) & & H^1(U^{i+3}, \mathcal{F}) & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & 
 \end{array}$$

cuyas columnas son exactas.

Como  $\bar{y} \in \text{Im } \beta$ , existe  $y \in Q(U^{i+1})$  tal que  $\beta(y) = \bar{y}$ , entonces

$$\beta \circ \delta_i(y) = \delta_i \circ \beta(y) = \delta_i(\bar{y}) = 0$$

(por definición de  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, R)$ ). Como las columnas son exactas, existe  $s \in \mathcal{F}(U^{i+2})$  tal que  $\alpha(s) = \delta_i(y)$ , por tanto  $\alpha \circ \delta_{i+1}(s) = \delta_{i+1} \circ \alpha(s) = \delta_{i+1} \circ \delta_i(y) = 0$ , pero  $\alpha$  es inyectivo, por tanto  $\delta_{i+1}(s) = 0$ , es decir,  $s \in \ker \delta_{i+1}$ , i.e.,  $\bar{s} \in \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ .

Un argumento similar al empleado en la demostración del lema precedente, muestra que la asignación  $\bar{y} \mapsto \bar{s}$  es inyectiva.  $\diamond$

**Observación 12.4.3.** Artin demostró que si  $X$  es un esquema casi compacto en el que todo conjunto finito de puntos geométricos tiene una vecindad afín (por ejemplo cualquier variedad casi-proyectiva), entonces para todo par de cubiertas étales  $U \rightarrow X$  y  $W \rightarrow U^n$ , existe un cubriente étale  $V \rightarrow U$  tal que  $V^n \rightarrow W$  es un cubriente étale. En particular, para todos estos esquemas la cohomología de Čech de cualquier gavilla étale coincide con la cohomología étale de la gavilla.

19/11/2019

## 12.5. Teoremas de comparación III.

Tanto en el caso analítico como en el sitio de Zariski, los fibrados vectoriales y los fibrados principales juegan un papel muy importante. Sus análogos en un sitio plano también son muy importantes.

**Definición.** Un esquema  $G$  sobre  $S$  se dice un  $S$ -esquema en grupos si existen morfismos

1)  $\mu : G \times_S G \rightarrow G$

2)  $1 : G \rightarrow G$  y

3)  $e : S \rightarrow G$  tales que los diagramas siguientes son conmutativos:

(Asociatividad)

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{\text{id} \times \mu} & G \times_S G \\ \downarrow \mu \times \text{id} & & \downarrow \mu \\ G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

(Neutro)

$$\begin{array}{ccccc} S \times G & \xrightarrow{e \times \text{id}} & G \times_S G & \xleftarrow{\text{id} \times e} & G \times S \\ & \searrow \pi_2 & \downarrow \mu & \swarrow \pi_1 & \\ & & G & & \end{array}$$

(Inverso)

$$\begin{array}{ccccc} G \times_S G & \xrightarrow{1 \times \text{id}} & G \times_S G & \xleftarrow{\text{id} \times 1} & G \times_S G \\ \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{e} & G & \xleftarrow{e} & S \end{array}$$

**Ejemplo 12.5.1.** El esquema  $\mathbb{G}_m := \text{Spec } \frac{\mathbb{Z}[x,y]}{(xy-1)}$  admite una estructura de esquema en grupos y se le llama el grupo multiplicativo.

**Ejemplo 12.5.2.** Los esquemas  $GL_n := \text{Spec } \mathbb{Z}[x_{1,1}, \dots, x_{n,n}, y]/(y \cdot \det(x_{i,j}) - 1)$  y  $SL_n := \text{Spec } \mathbb{Z}[x_{1,1}, \dots, x_{n,n}]/(\det(x_{i,j}) - 1)$  admiten estructura de esquema en grupos.

**Definición.** Dados un  $S$ -esquema en grupos  $G$  y un  $S$ -esquema  $X$ , diremos que  $G$  actúa (por la izquierda) sobre  $X$  si se tiene un morfismo  $\rho : G \times_S X \rightarrow X$  de manera que los diagramas evidentes sean conmutativos:

(Asociatividad)

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S X & \xrightarrow{\text{id} \times \rho} & G \times_S X \\ \downarrow \mu \times \text{id} & & \downarrow \rho \\ G \times_S X & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}$$

(Neutro)

$$\begin{array}{ccc} S \times X & \xrightarrow{e \times \text{id}} & G \times_S X \\ & \searrow \pi_2 & \downarrow \rho \\ & & X \end{array}$$

**Ejemplo 12.5.3.** Todo  $S$ -esquema en grupos actúa sobre sí mismo vía la multiplicación.

**Definición.** Dados un  $S$ -esquema en grupos  $G$  y un morfismo  $f : Y \rightarrow X$  en un sitio plano  $S_\eta$ , diremos que  $Y \rightarrow X$  es un  $G$ -torsor si  $G$  actúa en  $Y$  y además se satisface

- 1)  $f : Y \rightarrow X$  es fielmente plano y
- 2) el diagrama siguiente es cartesiano

$$\begin{array}{ccc} Y \times G & \xrightarrow{\rho} & Y \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

**Observación 12.5.4.** En la discusión que sigue  $S = \text{Spec } k$ , trabajaremos en el gran sitio étale sobre  $S$  (es decir, consideraremos esquemas sobre  $k$  y los morfismos entre  $k$ -esquemas serán morfismos étale) y el esquema en grupos  $G$  será un grupo finito. Bajo estas hipótesis, a un  $G$ -torsor  $Y \rightarrow X$  lo llamaremos un cubriente de Galois con grupo de Galois  $G$ .

### 12.5.1. Cohomología étale vs. cohomología de Galois.

**Lema 12.5.5.** Sean  $\mathcal{F}$  una gavilla étale,  $X$  un esquema conexo y  $\mathcal{U} = \{ Y \rightarrow X \}$  un cubriente de Galois con grupo de Galois  $G$ , entonces

$$\check{H}^a(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^a(G, \mathcal{F}(Y)).$$

DEMOSTRACIÓN.  $\check{H}^a(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta_a / \text{Im } \delta_{a-1}$ , donde

$$\mathcal{F}(Y^a) \xrightarrow{\delta_{a-1}} \mathcal{F}(Y^{a+1}) \xrightarrow{\delta_a} \mathcal{F}(Y^{a+2}).$$

Pero  $Y^a \cong Y \times G^{a-1}$ , por tanto

$$\mathcal{F}(Y^a) = \mathcal{F}(Y \times G^{a-1}) = \prod_{\bar{g} \in G^{a-1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}),$$

es decir, la sucesión exacta anterior puede reescribirse como

$$(12.5.1) \quad \prod_{\bar{g} \in G^{a-1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \xrightarrow{\delta_{a-1}} \prod_{\bar{g} \in G^a} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \xrightarrow{\delta_a} \prod_{\bar{g} \in G^{a+1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}).$$

Por otro lado,  $H^a(G, \mathcal{F}(Y)) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^a(\mathbb{Z}, \mathcal{F}(Y))$ , por lo que podemos calcular estos grupos a partir de cualquier resolución  $\mathbb{Z}G$ -proyectiva de  $\mathbb{Z}$ .

Sea  $Q^\bullet \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  la resolución  $\mathbb{Z}G$  proyectiva de  $\mathbb{Z}$  dada por

$$Q_0 = \mathbb{Z}G,$$

$Q_n = \mathbb{Z}G$ -módulo libre generado por  $\bar{g} \in G^n$ , con diferenciales

$$\alpha_n([g_1, \dots, g_n]) = g_1[g_2, \dots, g_n] + \sum (-1)^i [g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n] + (-1)^n [g_1, \dots, g_{n-1}].$$

Los morfismos  $\alpha_i$  inducen un complejo

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Q_{a-1}, \mathcal{F}(Y)) \xrightarrow{\alpha_{a-1}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Q_a, \mathcal{F}(Y)) \xrightarrow{\alpha_a} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Q_{a+1}, \mathcal{F}(Y)) \xrightarrow{\alpha_{a+1}} \dots$$

Como  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Q_a, \mathcal{F}(Y)) = \prod_{\bar{g} \in G^a} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\})$ , el complejo precedente equivale a:

$$(12.5.2) \quad \prod_{\bar{g} \in G^{a-1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \xrightarrow{\alpha_{a-1}} \prod_{\bar{g} \in G^a} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \xrightarrow{\alpha_a} \prod_{\bar{g} \in G^{a+1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \xrightarrow{\alpha_{a+1}} \dots$$

Comparando las sucesiones 12.5.1 y 12.5.2, como  $H^a(G, \mathcal{F}(Y)) = \ker \alpha_a / \text{Im } \alpha_{a-1}$  se tiene la conclusión deseada.  $\diamond$

**Corolario 12.5.6.** (Artin). Sean  $X = \text{Spec } K$ ,  $G = \text{Gal}(K^{nr}/K)$  y  $\mathcal{F}/X$  una gavilla étale, entonces

$$H_{\text{ét}}^*(X, \mathcal{F}) = H^*(G, \mathcal{F}(\text{Spec } K^{nr})).$$

$\diamond$

Si  $\mathcal{F}$  es  $\mathbf{G}_m$ , entonces  $H_{\text{ét}}^*(X, \mathcal{F}) = H^*(G, (K^{nr})^*)$ .

**Definición.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla  $l$ -ádica,  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ , entonces definimos

$$H_{\text{ét}}^a(X, \mathcal{F}) := \varprojlim H_{\text{ét}}^a(X, \mathcal{F}_n).$$

**Ejemplo 12.5.7.** Considere la gavilla  $\mathbb{Z}_l = \varprojlim \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z}$ , entonces  $H_{\text{ét}}^a(X, \mathbb{Z}_l) := \varprojlim H_{\text{ét}}^a(X, \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z})$ .



### 12.5.2. Sucesión espectral de Leray-Grothendieck

La escuela francesa (Cartan, E. Artin, Leray, etc.) habían desarrollado métodos para comparar algunos grupos de cohomología con los grupos de cohomología en otros espacios, esto en el contexto de la topología algebraica. Grothendieck introdujo una herramienta similar para comparar el valor que toma un funtor con el que toma otro funtor, en el contexto de categorías, lo cual puede particularizarse al contexto del sitio étale de un esquema dado, recobrando entonces los resultados de la vieja escuela, pero en el contexto de la cohomología étale.

El primer resultado que citaremos, sin demostración, es un teorema de Grothendieck, que él llama la sucesión espectral de Leray, por su semejanza con un resultado clásico de Leray en el contexto de variedades complejas.

**Teorema 12.5.8.** Sean  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{C}$  tres categorías. Supongase que se tienen dos funtores

$$F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

y

$$G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$$

tales que para todo objeto inyectivo  $Q \in \text{Ob}(\mathfrak{A})$ ,  $F(Q)$  es un objeto  $G$ -acíclico en  $\mathfrak{B}$ , entonces se tiene una sucesión espectral

$$R^i F \circ R^j G(A) \implies R^{i+j}(F \circ G)(A)$$

que converge a  $R^{i+j}(F \circ G)(A)$ .

**Ejemplo 12.5.9.** (Hochschild-Serre) Sea  $Y \rightarrow X$  un morfismo de Galois étale y con grupo de Galois  $G$ . Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla étale de  $\mathbb{Z}$ -módulos sobre  $X$ , entonces se tiene una sucesión espectral

$$E_2^{i,j} := H^i(G, H^j(Y, \mathcal{F})) \implies H^{i+j}(X, \mathcal{F}).$$

En efecto, considere los funtores  $F(\mathcal{F}) = \Gamma(Y, \mathcal{F})$  y  $L(M) = M^G = H^0(G, M)$ , entonces  $R^j F_*(\mathcal{F}) = H^j(Y, \mathcal{F})$  y  $R^i L_*(M) = H^i(G, M)$ , por lo que el teorema de Grothendieck se lee en este caso

$$H^i(G, H^j(Y, \mathcal{F})) \implies H^{i+j}(X, \mathcal{F}).$$

**Ejemplo 12.5.10.** Sean  $\mathfrak{A} = \text{Ét}/X$  y  $\mathfrak{B} = \text{Ét}/Y$ ; sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas.  $f$  induce un funtor, que denotaremos como  $f_*$ , de  $\text{Ét}/X \rightarrow \text{Ét}/Y$ , entonces considere el funtor  $\Gamma \circ f_*$ . La sucesión de Leray-Grothendieck asociada se lee entonces

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{F}) \implies H^{i+j}(X, \mathcal{F})$$

que es la que se conoce como sucesión espectral de Leray.

**Ejemplo 12.5.11.** Sean  $\mathfrak{A} = X_{\text{ét}}$ ,  $\mathfrak{B} = X_{\text{Zar}}$  y

$$\alpha : \begin{array}{ccc} X_{\text{ét}} & \rightarrow & X_{\text{Zar}} \\ \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

el morfismo de restricción. Entonces la sucesión espectral de Leray-Grothendieck es

$$H_{Zar}^i(X, R^j\alpha_*\mathcal{F}) \implies H_{\acute{e}t}^{i+j}(X, \mathcal{F}).$$

Si  $\mathcal{F}$  es una gavilla coherente, entonces  $R^j\alpha_*\mathcal{F} = 0$ , como puede verificarse fibr a fibra, por tanto la sucesión espectral dice simplemente que, si  $\mathcal{F}$  es una gavilla coherente, entonces

$$H_{Zar}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{\acute{e}t}^i(X, \mathcal{F}).$$

**Ejemplo 12.5.12.** (GAGA) Sean ahora  $\mathfrak{A} = X_{an}$  el sitio analítico de  $X$ ,  $\mathfrak{B} = X_{Zar}$  y

$$\alpha : \begin{array}{ccc} X_{\acute{e}t} & \rightarrow & X_{Zar} \\ \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

el morfismo de restricción. Entonces la sucesión espectral de Leray-Grothendieck es

$$H_{Zar}^i(X, R^j\alpha_*\mathcal{F}) \implies H_{an}^{i+j}(X, \mathcal{F}).$$

Si  $\mathcal{F}$  es una gavilla coherente, entonces  $R^j\alpha_*\mathcal{F} = 0$ , como puede verificarse fibr a fibra, por tanto la sucesión espectral dice simplemente que, si  $\mathcal{F}$  es una gavilla coherente, entonces

$$H_{Zar}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{an}^i(X, \mathcal{F}),$$

lo que recupera un viejo resultado de Serre.

**Ejemplo 12.5.13.** Sea  $X$  un esquema complejo y sean  $\mathfrak{A} = X_{an}$ ,  $\mathfrak{B} = X_{\acute{e}t}$  y

$$\alpha : \begin{array}{ccc} X_{\acute{e}t} & \rightarrow & X_{an} \\ \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

el morfismo de restricción. Entonces la sucesión espectral de Leray-Grothendieck es

$$H_{\acute{e}t}^i(X, R^j\alpha_*\mathcal{F}) \implies H_{an}^{i+j}(X, \mathcal{F}).$$

Si  $\mathcal{F}$  es una gavilla constante de grupos abelianos entonces  $R^j\alpha_*\mathcal{F} = 0$ , como puede verificarse fibra a fibra, por tanto la sucesión espectral dice simplemente que, si  $\mathcal{F}$  es una gavilla constante de grupos abelianos, entonces

$$H_{\acute{e}t}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{an}^i(X, \mathcal{F}),$$

en particular se tiene

$$(12.5.3) \quad \begin{aligned} H^a(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_l &= \lim_{l \mid a} H^a(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \\ &= \lim_{l \mid a} H_{\acute{e}t}^a(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \\ &= H_{\acute{e}t}^a(X, \mathbb{Z}_l). \end{aligned}$$

# Capítulo 13

## Sitios de Grothendieck revisitados.

### 13.1. Cribas.

En esta última lección queremos tratar, a nivel introductorio, el tema de Cribas y cómo el uso de cribas permite introducir la noción de topología de Grothendieck incluso en categorías que no son estables bajo productos fibrados.

Recordemos para comenzar que en un espacio topológico  $X$ , una criba  $\mathfrak{A}$  es una colección no vacía de abiertos tal que si  $U \in \mathfrak{A}$  y  $V \subset U$  es un abierto, entonces  $V \in \mathfrak{A}$ . Una tal criba se dice cubriente si  $X = \cup_{U \in \mathfrak{A}} U$ .

**Definición.** Dados una categoría  $\mathcal{C}$  y un objeto  $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , la categoría de objetos sobre  $U$ , que denotamos mediante  $\mathcal{C}/U$ , es la categoría cuyos objetos son  $j : V \rightarrow U$ , con  $j$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ ; y cuyos morfismos  $(j_V : V \rightarrow U) \rightarrow (j_W : W \rightarrow U)$  son los morfismos  $f : V \rightarrow W$  en  $\mathcal{C}$  tales que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow j_V & \swarrow j_W \\ & & U \end{array}$$

**Ejemplo 13.1.1.** Si  $\mathcal{C} = \text{Top}(X)$  y  $U$  es un abierto en  $X$ , entonces la categoría de objetos sobre  $U$  es la categoría  $\text{Top}(U)$ .

**Ejemplo 13.1.2.** Si  $\mathcal{C} = \text{Sch}/S$  es la categoría de esquemas sobre  $S$  y  $X$  es un esquema sobre  $S$ , entonces la categoría de objetos sobre  $X$  no es otra que la categoría  $\text{Sch}/X$ .

**Definición.** Dados una categoría  $\mathcal{C}$  y un objeto  $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , llamaremos criba sobre  $U$  a una colección  $\mathfrak{A}$  de objetos de  $\mathcal{C}/U$  tal que si  $j : V \rightarrow U \in \mathfrak{A}$  y  $g : W \rightarrow V$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ , entonces  $g \circ j : W \rightarrow U \in \mathfrak{A}$ .

Si  $\{j_i : V_i \rightarrow U\}$  es una familia de morfismos, la criba engendrada por esta familia es, por definición, la colección de los morfismos  $V \rightarrow U$  que factorizan a través de alguno de los  $V_i \xrightarrow{j_i} U$ .

Si  $\mathfrak{A}$  es una criba sobre  $U$  y  $V \xrightarrow{j} U$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ , la restricción  $\mathfrak{A}_V$  de

$\mathfrak{U}$  a  $V$  es, por definición, la criba sobre  $V$  constituida por los morfismos  $W \rightarrow V$  tales que la composición  $W \longrightarrow V \xrightarrow{j} U \in \mathfrak{U}$ .

**Ejemplo 13.1.3.** En la categoría  $\mathbb{T}op(X)$  esta noción de criba coincide con la noción usual. La criba generada por una colección de abiertos  $\{U_\alpha\}$  es la colección de todos los abiertos contenidos en alguno de los  $U_\alpha$  y la restricción de una criba  $\mathfrak{U}$  sobre  $U$  a un abierto  $V$  de  $U$  es la familia de abiertos de  $V$  que pertenecen a la familia  $\mathfrak{U}$ .

**Ejemplo 13.1.4.** Si  $\mathcal{C}$  es una subcategoría de  $\mathcal{S}ch/S$  (v.g. la categoría de esquemas sobre  $S$  con morfismos étale), la criba sobre  $X$  generada por la identidad es la colección de todos los esquemas sobre  $X$  con morfismos estructurales en  $\mathcal{C}$  (v.g. étale sobre  $X$ ).

Si  $\mathfrak{U}$  es la criba sobre  $X$  engendrada por  $\{V \xrightarrow{f} X\}$  y  $W \rightarrow X$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ , la restricción de  $\mathfrak{U}$  a  $W$  es la criba engendrada por  $\{V \times_X W \xrightarrow{\pi_2} W\}$ . En efecto, el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} V \times_X W & \xrightarrow{\pi_2} & W \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

nos muestra que  $V \times_X W \xrightarrow{\pi_2} W \longrightarrow X \in \mathfrak{U}_W$ , pues factoriza vía  $V \xrightarrow{f} X$ ; por otra parte,  $T \xrightarrow{g} W \in \mathfrak{U}_W$  si y sólo si  $g$  factoriza a través de  $f$ , es decir, si y sólo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

conmuta, lo cual, por la propiedad universal del producto cartesiano, entraña en particular la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & W \\ & \searrow & \nearrow \pi_2 \\ & V \times_X W & \end{array}$$

**Definición.** Dotar a una categoría  $\mathcal{C}$  de una topología de Grothendieck consiste en dotar a cada objeto  $U$  de  $\mathcal{C}$  de una colección  $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$  de cribas sobre  $U$ , llamadas cribas cubrientes, de tal suerte que los axiomas siguientes se cumplen:

1. La criba engendrada por el morfismo identidad de  $U$  es una criba cubriente.
2. Si  $\mathfrak{U}$  es una criba cubriente sobre  $U$  y  $V \rightarrow U$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ , entonces la criba  $\mathfrak{U}_V$  es una criba cubriente.
3. Una criba localmente cubriente es cubriente. Dicho de otra manera, si  $\mathfrak{U}$  es una criba cubriente de  $U$  y  $\mathfrak{V}$  es otra criba sobre  $U$  tal que para todo  $W \rightarrow U \in \mathfrak{U}$ , la criba  $\mathfrak{V}_W$  es una criba cubriente, entonces  $\mathfrak{V}$  es una criba cubriente.

Una categoría  $\mathcal{C}$  provista de una topología de Grothendieck se dice un sitio.

Si  $\mathcal{C}$  es un sitio,  $\mathfrak{U}$  es una criba sobre  $U$  y  $\mathcal{F}$  es un funtor de  $\mathcal{C}$  en la categoría de conjuntos (o en una categoría abeliana), llamaremos sección (sobre  $U$ ) descrita  $\mathfrak{U}$ -localmente a una colección de secciones  $\{s_V \in \mathcal{F}(V)\}_{V \in \mathfrak{U}}$  tal que, para todo  $V \in \mathfrak{U}$  y para todo morfismo  $W \rightarrow V$ , se tenga  $s_V|_W = s_W$ .

Diremos que  $\mathcal{F}$  es una gavilla si para todo  $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , para toda criba cubriente  $\mathfrak{U}$  sobre  $U$  y para toda sección descrita  $\mathfrak{U}$ -localmente  $\{s_V \in \mathcal{F}(V)\}_{V \in \mathfrak{U}}$ , existe una única sección  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_V = s_V$  para todo  $V \rightarrow U \in \mathfrak{U}$ .

Como antes, se puede demostrar que la categoría de gavillas en grupos abelianos tiene suficientes inyectivos.

**Definición.** Una sucesión de gavillas

$$\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$$

es exacta si, para todo  $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  y para toda  $s \in \mathcal{G}(U)$  tal que  $g(s) = 0$ , existen una criba cubriente  $\mathfrak{U}$  sobre  $U$  y secciones  $t_V \in \mathcal{F}(V)$  para todo  $V \rightarrow U \in \mathfrak{U}$  tales que  $f(t_V) = s|_V$ .

**Ejemplo 13.1.5.** Si  $X$  es un espacio topológico, las nociones precedentes recuperan la noción de gavilla en  $X$ .

**Ejemplo 13.1.6.** Si  $X$  es un esquema y  $\text{Sch}/X$  es la categoría de esquemas sobre  $X$ , la topología fpcc sobre  $\text{Sch}/X$  es la topología de Grothendieck para la cual una criba  $\mathfrak{U}$  sobre un  $X$  esquema  $U$  es cubriente si es engendrada por una familia finita de morfismos planos cuyas imágenes cubren a  $U$ . En este contexto la presente noción de gavilla coincide con la noción de gavilla que hemos visto en las secciones previas.

Claramente es posible reformular en este contexto más general las nociones de secciones globales, funtores derivados, etc., así por ejemplo, si la categoría  $\mathcal{C}$  tiene un objeto final  $X$  (v.g. el abierto  $X$  en la categoría  $\text{Top}(X)$ , o el esquema  $S$  en la categoría  $\text{Schm}/S$ ) y  $\mathcal{F}$  es una gavilla con valores en una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ , llamaremos secciones globales de  $\mathcal{F}$  al objeto  $\mathcal{F}(X) \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  y lo denotaremos también mediante  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  o como  $H^0(X, \mathcal{F})$ . Observe que el funtor  $\Gamma$  es un funtor exacto izquierdo, por lo que podemos hablar de sus funtores derivados derechos, siempre que la categoría de gavillas con valores en  $\mathcal{A}$  tenga suficientes inyectivos.